UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

LA PROPIEDAD LINDELÖF Σ EN ESPACIOS DE FUNCIONES

tesis que presenta

Joel Alberto Aguilar Velázquez

para obtener el grado académico de

Maestro en Ciencias (Matemáticas)

dirigida por

el **Dr. Vladimir Tkachuk**

Índice general

Resumen

En esta tesis se estudió la propiedad Lindelöf Σ en espacios topológicos generales y en espacios de funciones con la topología de la convergencia puntual con el propósito de presentar generalizaciones de varios resultados clásicos sobre espacios compactos a los espacios Lindelöf Σ. La tesis tiene dos capitulos divididos en ocho secciones. Cada sección presenta un resultado importante en la teoría de espacio Lindelöf Σ. Se dan entre otras cosas:

(1) Catorce definiciones equivalentes de la propiedad Lindelöf Σ con demostración completa.

(2) Una prueba de que todo espacio Lindelöf Σ con una bese punto-numerable es metrizable. Este resultado es un fortalecimiento de un famoso teorema de Mishchenko establecido para espacios compactos.

(3) Bajo la Hipótesis del Continuo, una demostración completa de que cada espacio Lindelöf Σ con una diagonal pequeña tiene una red numerable.

El resultado principal de esta tesis es un famoso ejemplo de Reznichenko de un compacto de Talagrand K tal que $K = \beta(K\backslash\{x\})$ para algún punto $x \in K$. Este ejemplo tiene muchas aplicaciones tanto en Topología como Analísis Funcional. El compacto de Reznichenko es un compacto de Talagrand y una unión numerable de compactos de Eberlein sin ser un compacto de Eberlein.

Una peculiaridad histórica es que Reznichenko nunca publicó su ejemplo. Los topólogos aprendieron sus propiedades de un preliminar de Reznichenko que circuló por más de veinte años antes de que fuera descrito en una monografía sobre Analísis Funcional.

Introducción

Los conjuntos analíticos, esto es, imágenes continuas del espacio ω^ω, constituyen una de las nociones centrales en la Teoría Descriptiva de Conjuntos. La cumbre en el desarrollo de la teoría de conjuntos analíticos fue a comienzos del siglo XX cuando fueron publicados trabajos respectivos de Lebesgue, Alexandroff, Hausdorff, Souslin y Luzin.

En la segunda mitad del siglo XX especialistas en la teoría descriptiva de conjuntos observaron que una generalización natural a este concepto es considerar imágenes de ω^ω bajo mapeos superiormente semicontinuos, dando origen entre otras a la clase de los espacios K-analíticos. En Análisis Funcional los espacios de Banach débilmente compactamente generados, abreviado WCG (weakly compactly generated Banach spaces), fueron intensamente estudiados a finales de la década de los sesenta y a principios de la década de los setenta en el siglo pasado. Los espacios K-analíticos resultaron ser de importancia en el Análisis Funcional después de que Talagrand demostró que cada espacio WCG es K-analítico con la topología débil [Ta].

El siguiente paso natural fue considerar imágenes de subconjuntos arbitrarios de ω^ω bajo mapeos superiormente semicontinuos; en el Análisis Funcional la generalización correspondiente al concepto de K-analiticidad son los espacios numerablemente K-determinados. Más o menos al mismo tiempo la lógica interna en el desarrollo de la topología atrajo la atención de los topológos a la misma clase.

La noción de espacio Σ la introdujo Nagami en 1969 [Na] y vino a unificar algunas de las investigaciones que se hicieron en esa década alrededor del problema que representaba el encontrar una clase de espacios topológicos que tuviera las propiedades suficientemente buenas como para que, entre otras cosas, la paracompacidad fuera preservada bajo productos de elementos de la clase. Pronto fue evidente que la clase de espacios Σ con la propiedad Lindelöf (esto es, la clase de espacios Lindelöf Σ) merecía atención especial pues coincide con la clase de espacios numerablemente K-determinados. Desde entonces los espacios Lindelöf Σ ocupan un lugar importante en Topología así como en Análisis Funcional, Algebra Topológica y Teoría Descriptiva de Conjuntos.

La clase de espacios Lindelöf Σ se puede caracterizar como la mínima que contiene a los espacios compactos, los espacios segundo numerables, y es invariante bajo subespacios cerrados, mapeos continuos y productos finitos. El propósito de esta tesis es presentar generalizaciones de varios resultados clásicos sobre espacios compactos a los espacios Lindelöf Σ. Una muestra de la importancia de una noción topológica es el número de definiciones equivalentes para ella. Fácilmente se pueden encontrar diez o más equivalencias para la compacidad, pero si un concepto es de poco uso es difícil encontrar dos. La propiedad Lindelöf Σ no es una excepción.

La tesis consta de dos capítulos cada uno dividido en cuatro secciones y cada sección presenta al menos un resultado importante en la teoría de espacios Lindelöf Σ. En el primer capítulo se estudia la propiedad Lindelöf Σ en espacios generales.

En la sección 1.1 se presentarán catorce definiciones equivalentes a la propiedad Lindelöf Σ con demostraciónes completas. Además se probará que esta clase de espacios es invariante bajo uniones, intersecciones y productos numerables.

La sección 1.2 contiene un resultado de Buzyakova que establece que todo espacio Lindelöf Σ es un D-espacio y un teorema de Arhangel'skii en el que se prueba que cualquier producto y cualquier σ-producto de espacios Lindelöf Σ es estable; además, veremos que todo Σ-producto de espacios Lindelöf Σ es ω-estable.

En la sección 1.3 se demuestra un teorema de Chaber que establece que todo espacio Lindelöf Σ con una base punto-numerable, es segundo numerable. Se presenta un resultado de Shapirovsky que prueba que si X es un espacio compacto con π-carácter no numerable, entonces el espacio $\mathbb{D}^{\omega_1}$ es una imagen continua de algún subespacio cerrado de X. Bajo la Hipótesis del Continuo se demuestra un teorema de Juhász y Szentmiklóssy que establece que todo espacio compacto con diagonal pequeña es metrizable y un teorema de Gruenhage que dice que todo espacio Lindelöf Σ con diagonal pequeña tiene peso de red numerable.

La sección 1.4 finaliza el capítulo 1. Se presenta un resultado de Gruenhage que establece que todo espacio Lindelöf Σ con diagonal G_δ tiene peso de red numerable. Probaremos que cualquier espacio hereditariamente Lindelöf tiene cardinalidad a lo más $\mathfrak{c}$ mismo que es un teorema perteneciente a de Groot. El resultado principal de esta sección es el teorema de Hodel en el cual se prueba que un espacio es hereditariamente Lindelöf Σ si y sólo si tiene peso de red numerable. Como un resultado auxiliar se demostrará el teorema de Uspensky que establece que si X es un espacio disperso, entonces el número de Lindelöf de la ω-modificación de X es menor o igual que el número de Lindelöf de X.

En el segundo capítulo se estudia la propiedad Lindelöf Σ en espacios de funciones con la topología de la convergencia puntual.

La sección 2.1 introduce la relación de t-equivalencia y algunas propiedades t-invariantes. El teorema principal de esta sección es un resultado de Okunev que establece que la σ-compacidad, la K-analiticidad y la propiedad Lindelöf Σ son propiedades t-invariantes.

En la sección 2.2 se demostrará que todo espacio metalindelöf con *extent* numerable es un espacio de Lindelöf. Presentamos una demostración completa del teorema de Baturov que establece que $ext(Y) = l(Y)$ para cualquier subespacio Y de $C_p(X)$ donde X es un espacio Lindelöf Σ; dicho enunciado es una generalización de un teorema clásico de Grothendieck por lo cual tiene numerosas aplicaciones en Análisis Funcional y Topología.

La sección 2.3 contiene un Teorema de Uspenkij que establece que si X es Lindelöf Σ, entonces existe un conjunto Y con la propiedad Lindelöf Σ para el cual $C_p(X) \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}^X$. El resultado principal de esta sección es un teorema de Okunev sobre la condición Lindelöf Σ de $C_p(Y)$ cuando X y $Y \subseteq C_p(X)$ son espacios Lindelöf Σ. Concluimos la sección con dos teoremas de Tkachuk en los cuales se prueba que si $C_p(X)$ es Lindelöf Σ, entonces los espacios de funciones iterados $C_{p,2n+1}(X)$ y $C_{p,2n}(\upsilon X)$ son Lindelöf Σ para todo n.

La sección 2.4 finaliza el capítulo 2. Se presenta un resultado de Talagrand que establece que si X es un espacio compacto y $T \subseteq C_p(X)$ es K-analítico que separa los puntos de X, entonces $C_p(X)$ es un espacio K-analítico. El resultado principal de esta sección es el ejemplo de Reznichenko de un espacio compacto K que no es Eberlein mientras $C_p(K)$ es K-analítico y existe un punto no aislado $x \in K$ tal que $K\backslash\{x\}$ es pseudocompacto y por lo tanto K es canónicamente homeomorfo a $\beta(K\backslash\{x\})$.

Quiero agradecer a los sinodales: el Dr. Ángel Tamariz, el Dr. Richard Wilson y el Dr. Vladimir Tkachuk, por la revisión de esta tesis, en especial al asesor el Dr. Vladimir Tkachuk por su minuciosa supervisión y paciencia. A mis padres y al pueblo de México.

X

Capítulo 1

La propiedad Lindelöf Σ en espacios generales

El primer capítulo consiste de cuatro secciónes. En la sección número uno comenzaremos definiendo la propiedad Lindelöf Σ, la cual es una generalización del concepto de compacidad. Presentaremos catorce definiciones equivalentes a la propiedad Lindelöf Σ con demostraciónes completas.

En la segunda sección demostramos un resultado de Buzyakova sobre la relación entre espacios Lindelöf Σ y D-espacios, así como un teorema de Arhangel'skii que establece que cualquier producto de espacios Lindelöf Σ es estable.

La sección número tres contiene un teorema de Chaber sobre los espacios Lindelöf Σ con bases punto-numerables, así como dos teoremas de Shapirovsky que establecen condiciones suficientes para que un subconjunto cerrado de un espacio compacto se mapee continuamente sobre un cubo de Cantor. Bajo la Hipótesis del Continuo, demostramos el teorema de Juhász y Szentmiklóssy sobre la estrechez de un espacio compacto con diagonal pequeña y el resultado principal de esta sección, un teorema de Gruenhage sobre el peso de red de un espacio Lindelöf Σ con diagonal pequeña.

La parte final del capítulo es la sección 4, en la cual presentaremos un resultado de Gruenhage que establece que todo espacio Lindelöf Σ con diagonal G_δ tiene peso de red numerable. Probaremos que cualquier espacio hereditariamente Lindelöf tiene cardinalidad a lo más $\mathfrak{c}$ lo cual es un teorema perteneciente a de Groot. El resultado principal de esta sección es el teorema de Hodel sobre los espacios hereditariamente Lindelöf Σ. Como un resultado auxiliar se va a demostrar el teorema de Uspensky del número de Lindelöf de la ω-modificación de un espacio disperso.

1.1. Catorce definiciones equivalentes de la propiedad Lindelöf Σ

En esta sección definiremos la propiedad Lindelöf Σ, la cual es una generalización del concepto de compacidad. Presentaremos catorce definiciones equivalentes a la propiedad Lindelöf Σ con demostraciónes completas. Se probará que esta clase de espacios es invariante bajo subconjuntos cerrados, imagenes continuas, uniones y productos numerables.

En este texto la palabra "espacio" significara "espacio de Tychonoff". Dado un espacio X denotaremos su topología por $\tau(X)$ y a la familia de todos los subconjuntos de X por $exp(X)$; definamos $\tau^*(X) = \tau(X)\backslash\{\emptyset\}$ y $\tau(A, X) = \{U \in \tau(X) : A \subseteq U\}$ para cada $A \subseteq X$. Si $A = \{x\}$ escribiremos $\tau(x, X)$ en lugar de $\tau(\{x\}, X)$. Una red $\mathcal{N}$ para X es una familia de subconjuntos de X tal que para cada $x \in X$ y $U \in \tau(x, X)$ existe $N \in \mathcal{N}$ para el cual $x \in N \subseteq U$. El peso de red de X lo definimos como $min\{|\mathcal{N}| : \mathcal{N}$ es una red para $X\} + \omega$ y lo denotamos por $nw(X)$. Dado un conjunto A y un cardinal κ sean $[A]^\kappa = \{B \subseteq A : |B| = \kappa\}$, $[A]^{<\kappa} = \{B \subseteq A : |B| < \kappa\}$ y $[A]^{\leq\kappa} = [A]^\kappa \cup [A]^{<\kappa}$.

Definición 1.1.1. Sea X un espacio. Dadas dos familias $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq exp(X)$, diremos que $\mathcal{A}$ es una red con respecto a $\mathcal{B}$ si para cada $B \in \mathcal{B}$ y $U \in \tau(B, X)$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $B \subseteq A \subseteq U$.

Definición 1.1.2. Una familia $\mathcal{K} \subseteq exp(X)$ es cubierta compacta de X si cada elemento de $\mathcal{K}$ es compacto y $X = \bigcup \mathcal{K}$.

Definición 1.1.3. Un espacio se llama Lindelöf Σ si posee una red numerable con respecto a una cubierta compacta.

Proposición 1.1.4. (a) Todo espacio σ-compacto es Lindelöf Σ.
(b) Todo espacio con peso de red numerable es Lindelöf Σ.

Demostración. Sea X un espacio. Supongamos primero que X es σ-compacto, es decir $X = \bigcup_{n<\omega} X_n$, donde X_n es un subconjunto compacto de X para cada $n < \omega$. La familia $\mathcal{K} = \{X_n : n < \omega\}$ es una cubierta compacta de X y una red numerable con respecto a sí misma. Lo anterior demuestra que X es Lindelöf Σ.
Supongamos ahora que $\mathcal{N}$ es una red numerable en X. La familia $\mathcal{K} = \{\{x\} : x \in X\}$ es una cubierta compacta de X y $\mathcal{N}$ es una red numerable con respecto a $\mathcal{K}$. Por consiguiente, el espacio X es Lindelöf Σ. ■

Corolario 1.1.5. (a) Todo espacio compacto es Lindelöf Σ.
(b) Todo espacio segundo numerable es Lindelöf Σ.

Proposición 1.1.6. Todo espacio Lindelöf Σ es Lindelöf.

Demostración. Sea X un espacio Lindelöf Σ y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Existe una cubierta compacta $\mathcal{C}$ de X y una red numerable $\mathcal{R}$ con respecto a $\mathcal{C}$. Consideremos a las familias $\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{R} :$ existe $\mathcal{U}_F \in [\mathcal{U}]^{<\omega}$ tal que $F \subseteq \bigcup \mathcal{U}_F\}$ y $\mathcal{U}^* = \bigcup\{\mathcal{U}_F : F \in \mathcal{F}\}$. Es claro que $|\mathcal{U}^*| \leq \omega$ y $\mathcal{U}^* \subseteq \mathcal{U}$, por lo que basta demostrar que $\mathcal{U}^*$ es una cubierta de X.
Dado $x \in X$, existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C$. Por la compacidad de C existe una familia finita $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ tal que $C \subseteq \bigcup \mathcal{V}$. Sea $F \in \mathcal{R}$ tal que $C \subseteq F \subseteq \bigcup \mathcal{V}$; entonces $F \in \mathcal{F}$ y por tanto, $x \in C \subseteq F \subseteq \bigcup \mathcal{U}_F \subseteq \bigcup \mathcal{U}^*$. Lo anterior implica que $\mathcal{U}^*$ es una cubierta de X. ■

Proposición 1.1.7. (a) La imagen de un espacio Lindelöf Σ bajo un mapeo continuo es un

espacio Lindelöf Σ.
(b) Los subconjuntos cerrados de espacios Lindelöf Σ, son también espacios Lindelöf Σ.
(c) La propiedad de ser un espacio Lindelöf Σ se conserva bajo productos finitos.

Demostración. **(a)** Sea X un espacio Lindelöf Σ y $f : X \to Y$ un mapeo continuo y sobreyectivo. Existe una cubierta compacta $\mathcal{C}$ de X y una red numerable $\mathcal{R}$ con respecto a $\mathcal{C}$. Por la continuidad de f, la familia $\mathcal{K} = \{f(C) : C \in \mathcal{C}\}$ es una cubierta compacta de Y. Para demostrar que Y es un espacio Lindelöf Σ, basta comprobar que la familia numerable $\mathcal{V} = \{f(R) : R \in \mathcal{R}\}$ es una red con respecto a $\mathcal{U}$.
Sean $K \in \mathcal{K}$ y $W \in \tau(K, Y)$; existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $f(C) = K$. El conjunto $f^{-1}(W)$ es una vecindad de C en X, por lo cual existe $R \in \mathcal{R}$ tal que $C \subseteq R \subseteq f^{-1}(W)$. Esto demuestra que $K \subseteq f(R) \subseteq W$ y $f(R) \in \mathcal{V}$. Por lo tanto $\mathcal{V}$ es una red con respecto a $\mathcal{U}$.

(b) Sea X un espacio Lindelöf Σ y F un subespacio cerrado de X. Existe una cubierta compacta $\mathcal{C}$ de X y una red numerable $\mathcal{R}$ con respecto a $\mathcal{C}$. La familia $\mathcal{C}_F = \{C \cap F : C \in \mathcal{C}\}$ es una cubierta compacta de F. Basta demostrar que la familia $\mathcal{R}_F = \{R \cap F : R \in \mathcal{R}\}$ es una red con respecto a $\mathcal{C}_F$.
Supongamos que $C \cap F \in \mathcal{C}_F$ y $U \in \tau(C \cap F, F)$; existe $V \in \tau(X)$ tal que $V \cap F = U$. El conjunto $V \cup (X \backslash F)$ es una vecindad abierta de C en X así que existe $R \in \mathcal{R}$ tal que $C \subseteq R \subseteq V \cup (X \backslash F)$. Lo anterior implica que $C \cap F \subseteq R \cap F \subseteq V \cap F = U$ mientras que $R \cap F \in \mathcal{R}_F$. Por consiguiente, $\mathcal{R}_F$ es una red con respecto a $\mathcal{C}_F$.

(c) Es claro que basta demostrar que el producto de dos espacios Lindelöf Σ es Lindelöf Σ. Sean X y Y espacios Lindelöf Σ. Existe una cubierta compacta $\mathcal{C}_1$ de X y una red numerable $\mathcal{R}_1$ con respecto a $\mathcal{C}_1$, así como una cubierta compacta $\mathcal{C}_2$ de Y y una red numerable $\mathcal{R}_2$ con respecto a $\mathcal{C}_2$. La familia $\mathcal{C} = \{C_1 \times C_2 : C_1 \in \mathcal{C}_1 \text{ y } C_2 \in \mathcal{C}_2\}$ es una cubierta compacta de $X \times Y$ y $\mathcal{R} = \{R_1 \times R_2 : R_1 \in \mathcal{R}_1 \text{ y } R_2 \in \mathcal{R}_2\}$ es numerable. Basta demostrar que $\mathcal{R}$ es una red con respecto a $\mathcal{C}$.
Sean $C_1 \times C_2 \in \mathcal{C}$ y $W \in \tau(C_1 \times C_2, X \times Y)$; por la compacidad de C_1 y C_2 existen $U \in \tau(C_1, X)$ y $V \in \tau(C_2, Y)$ tales que $C_1 \times C_2 \subseteq U \times V \subseteq W$ [Tk7, Fact 3, S.271]. Existen $R_1 \in \mathcal{R}_1$ y $R_2 \in \mathcal{R}_2$ tales que $C_1 \subseteq R_1 \subseteq U$ y $C_2 \subseteq R_2 \subseteq V$, y en consecuencia, $C_1 \times C_2 \subseteq R_1 \times R_2 \subseteq U \times V \subseteq W$. Por consiguiente, $\mathcal{R}$ es una red con respecto a $\mathcal{C}$. ■

La propiedad Lindelöf Σ también es invariante bajo productos numerables como veremos más adelante.

1.1.8 Ejemplo. La recta de Sorgenfrey $\mathcal{S}$ es un espacio Lindelöf mientras que el plano de Sorgenfrey $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ no lo es. De modo que la Proposición 1.1.7 (c) muestra que la recta de Sorgenfrey no es un espacio Lindelöf Σ.

Dado un conjunto X y dos subconjuntos disjuntos A, B de X, diremos que una familia $\mathcal{F} \subseteq exp(X)$ separa A de B si para cada $a \in A$ y $b \in B$ existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $a \in F$ y $b \notin F$. Consideremos a la colección $\bigwedge \mathcal{A} = \{\bigcap \mathcal{B} : \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \text{ y } |\mathcal{B}| < \omega\} \backslash \{\emptyset\}$ para cada familia $\mathcal{A} \subseteq exp(X)$.

Teorema 1.1.9. Las siguientes condiciones son equivalentes para todo espacio X:
(a) X es un espacio Lindelöf Σ;
(b) existe una familia numerable de subconjuntos cerrados de X que es una red con respecto a una cubierta compacta de X.
(c) para cada compactificación bX del espacio X, existe una familia numerable de subconjuntos compactos de bX que separa a X del residuo $bX \backslash X$;
(d) para cada compactificación bX del espacio X, existe una familia numerable de subespacios Lindelöf Σ de bX que separa a X del residuo $bX \backslash X$;

(e) existe una familia numerable de subespacios compactos de βX que separa a X del residuo $\beta X\backslash X$;
(f) existe una familia numerable de subespacios Lindelöf Σ de βX que separa a X del residuo $\beta X\backslash X$;
(g) existe una compactificación bX del espacio X y una familia numerable de subespacios compactos de bX que separa a X del residuo $bX\backslash X$;
(h) existe una compactificación bX del espacio X y una familia numerable de subespacios Lindelöf Σ de bX que separa a X del residuo $bX\backslash X$;
(i) existe un espacio Z del cual X es subespacio y una familia numerable de subespacios compactos de Z que separa a X del residuo $Z\backslash X$.

Demostración.(a)⇒(b) Existe una cubierta compacta $\mathcal{C}$ de X y una red numerable $\mathcal{R}$ con respecto a $\mathcal{C}$. Basta demostrar que $\{\overline{R} : R \in \mathcal{R}\}$ es una red con respecto a $\mathcal{C}$.
Consideremos $C \in \mathcal{C}$ y $U \in \tau(C, X)$. Por regularidad podemos encontrar $V \in \tau(X)$ tal que $C \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Escojamos $R \in \mathcal{R}$ tal que $C \subseteq R \subseteq V$; entonces, $C \subseteq \overline{R} \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Por lo tanto $\{\overline{R} : R \in \mathcal{R}\}$ es una red con respecto a $\mathcal{C}$.

(b)⇒(c) Consideremos una compactificación bX de X, una cubierta compacta $\mathcal{C}$ de X y una red numerable $\mathcal{R} \subseteq exp(X)$ con respecto a $\mathcal{C}$. Sea $\mathcal{F} = \{\overline{R}^{bX} : R \in \mathcal{R}\}$, donde $\overline{R}^{bX}$ es la cerradura de R en el espacio bX. Es claro que la familia $\mathcal{F}$ es numerable y sus elementos son compactos. Basta demostrar que $\mathcal{F}$ separa a X de $bX\backslash X$.
Escojamos $x \in X$ y $y \in bX\backslash X$. Existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C$; el subespacio C al ser compacto es cerrado en bX. Por la regularidad de bX existe $O \in \tau(C, bX)$ tal que $y \notin \overline{O}^{bX}$. Tomemos $R \in \mathcal{R}$ tal que $C \subseteq R \subseteq O \cap X$. Entonces $x \in C \subseteq R \subseteq \overline{R}^{bX} \subseteq \overline{O}^{bX} \subseteq bX\backslash\{y\}$. Por consiguiente $\mathcal{F}$ separa a X de $bX\backslash X$.

(c)⇒(d) Trivial.

(c)⇒(e) Trivial.

(e)⇒(g) Trivial.

(d)⇒(f) Trivial.

(f)⇒(h) Trivial.

(g)⇒(h) Sea $\mathcal{F}$ una familia numerable de subespacios compactos de bX que separa a X de $bX\backslash X$. Puesto que cada espacio compacto es Lindelöf Σ (ver el Corolario 1.1.5 (a)), cada elemento de $\mathcal{F}$ es Lindelöf Σ. Por lo tanto, la familia $\mathcal{F}$ consta de subconjuntos Lindelöf Σ de bX que separa X de $bX\backslash X$.

(h)⇒(i) Sea bX una compactificación de X y una familia numerable $\mathcal{L}$ de subespacios Lindelöf Σ de bX que separa a X de $bX\backslash X$. Para cada $L \in \mathcal{L}$, el espacio $\overline{L}^{bX}$ es una compactificación de L. Puesto que cada elemento de $\mathcal{L}$ es Lindelöf Σ y ya se ha demostrado que **(a)** implica **(c)**, se sigue que para cada $L \in \mathcal{L}$ existe una familia $\mathcal{C}_L$ de subespacios compactos de $\overline{L}^{bX}$ que separa a L de $\overline{L}^{bX}\backslash L$. La familia $\mathcal{C} = \bigcup\{\mathcal{C}_L : L \in \mathcal{L}\}$ es numerable y consta de subespacios compactos de bX. Demostraremos que $\mathcal{C}$ separa a X de $bX\backslash X$.
Escojamos $x \in X$ y $y \in bX\backslash X$. Existe $L \in \mathcal{L}$ tal que $x \in L$ y $y \notin L$.
• Si $y \notin \overline{L}^{bX}$, tomemos cualquier $C \in \mathcal{C}_L \subseteq \mathcal{C}$ tal que $x \in C$.
• Si $y \in \overline{L}^{bX}$, entonces $y \in \overline{L}^{bX}\backslash L$. Tomemos $C \in \mathcal{C}_L \subseteq \mathcal{C}$ tal que $x \in C$ y $y \notin C$.
En cualquier caso podemos encontrar $C \in \mathcal{C}_L \subseteq \mathcal{C}$ tal que $x \in C$ y $y \notin C$. Por lo tanto $\mathcal{C}$ separa a X de $bX\backslash X$. Finalmente, basta tomar $Z = bX$.

(i)⇒(a) Sea una $\mathcal{C}$ familia numerable de subespacios compactos de Z que separa X de $Z\backslash X$. Tomemos cualquier numeración $\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathcal{C}$. Para todo $x \in X$ y $y \in Z\backslash X$ escojamos un número natural $n(x, y)$ tal que $x \in C_{n(x,y)}$ y $y \notin C_{n(x,y)}$. Para cada $x \in X$ hagamos

$N(x) = \{n(x,y) : y \in Z \backslash X\}$ y $A_x = \bigcap\{C_n : n \in N(x)\}$; es claro que A_x es compacto y $A_x \subseteq X$. La familia $\mathcal{A} = \{A_x : x \in X\}$ es una cubierta compacta de X. Para demostrar que X es un espacio Lindelöf Σ, basta probar que $\mathcal{B} = \bigwedge\{C \cap X : C \in \mathcal{C}\}$ es una red con respecto a $\mathcal{A}$. Sean $A \in \mathcal{A}$ y $U \in \tau(A, X)$. Existe $x \in X$ tal que $A = A_x = \bigcap\{C_n : n \in N(x)\}$. Tomemos $V \in \tau(Z)$ tal que $V \cap X = U$.
Consideremos a la familia $\mathcal{F} = \{(\bigcap\{C_n : n \in N(x) \text{ y } n \leq m\}) \backslash V : minN(x) \leq m < \omega\}$. Si todos los elementos de $\mathcal{F}$ son no vacíos, entonces $\mathcal{F}$ es una familia centrada de subespacios cerrados de $C_{minN(x)}$ y por tanto $\emptyset \neq \bigcap \mathcal{F} \subseteq A \backslash V = \emptyset$ lo que es una contradicción [Tk7, Fact 1, S.326], por lo cual existe $m \geq minN(x)$ tal que $\bigcap\{C_n : n \leq m \text{ y } n \in N(x)\} \subseteq V$. Finalmente, $A = \bigcap\{C_n \cap X : n \in N(\mathrm{x})\} \subseteq \bigcap\{C_n \cap X : n \leq m \text{ y } n \in N(x)\} \subseteq V \cap X = U$ con $\bigcap\{C_n \cap X : n \leq m \text{ y } n \in N(x)\} \in \mathcal{B}$, lo cual muestra que $\mathcal{B}$ es una red con respecto a $\mathcal{A}$. ■

Teorema 1.1.10. Si X es un espacio segundo numerable, entonces para toda compactificación bX de X, el residuo $bX \backslash X$ es un espacio Lindelöf Σ. En particular $\beta X \backslash X$ es un espacio Lindelöf Σ.

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una base numerable de X. Para cada $B \in \mathcal{B}$ existe $U_B \in \tau(bX)$ tal que $U_B \cap X = B$. La familia $\mathcal{F} = \{bX \backslash U_B : B \in \mathcal{B}\}$ es numerable y consta de compactos. Por el Teorema 1.1.9 (f) basta demostrar que $\mathcal{F}$ separa a $Y = bX \backslash X$ de X.
Sean $y \in Y$ y $x \in X$. Existe $V \in \tau(bX)$ tal que $y \notin \overline{V}$ y $x \in V$, donde $\overline{V}$ es la cerradura de V en bX. Sea $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B = U_B \cap X \subseteq V \cap X$. Como X es denso en bX se tiene que $\overline{U_B} = \overline{U_B \cap X} \subseteq \overline{V \cap X} \subseteq \overline{V}$ [Tk7, Fact 1, S.271], por lo cual $y \in bX \backslash \overline{U_B} \subseteq bX \backslash U_B$. Si $F = bX \backslash U_B$, entonces para $F \in \mathcal{F}$ tenemos que $y \in F$ y $x \notin F$. Por lo tanto, la familia $\mathcal{F}$ separa a Y de X. ■

Definición 1.1.11. Dados espacios X y Y, un mapeo $p : X \to exp(Y)$ se llama multivaluado; en este caso escribiremos $p : X \to Y$ en lugar de $p : X \to exp(Y)$. Diremos que un mapeo multivaluado $p : X \to Y$ es sobreyectivo si $p(X) = \bigcup\{p(x) : x \in X\} = Y$; el mapeo p se llamara compacto-valuado si para cada $x \in X$ el subespacio $p(x)$ es compacto, y será superiormente semicontinuo si para cada $U \in \tau(Y)$ el subespacio $p^{-1}(U) = \{x \in X : p(x) \subseteq U\}$ es abierto en X.
Para abreviar la frase "$p : X \to Y$ es un mapeo superiormente semicontinuo compacto-valuado y sobreyectivo", diremos que p es un mapeo USCO.

Teorema 1.1.12. Dados espacios X y Y, un mapeo USCO $p : X \to Y$ y un subespacio $K \subseteq X$ tenemos las siguientes propiedades:

(a) Si K es compacto, entonces $p(K)$ es compacto;
(b) Si K es Lindelöf Σ, entonces $p(K)$ es Lindelöf Σ;
(c) $l(Y) \leqslant l(X)$, donde $l(X)$ y $l(Y)$ son los números de Lindelöf de X y Y respectivamente.

Demostración. **(a)** Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $p(K) = \bigcup\{p(x) : x \in K\}$. Para cada $x \in K$, puesto que $p(x)$ es compacto, existe una familia finita $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{U}$ tal que $p(x) \subseteq \bigcup \mathcal{U}_x$. La familia $\mathcal{V} = \{p^{-1}(\bigcup \mathcal{U}_x) : x \in K\}$ consta de abiertos en X y

$$\begin{aligned} K \subseteq \{y \in X : p(y) \subseteq \textstyle\bigcup \mathcal{U}_x \text{ para algún } x \in K\} &= \textstyle\bigcup_{x \in K}\{y \in X : p(y) \subseteq \bigcup \mathcal{U}_x\} \\ &= \textstyle\bigcup_{x \in K} p^{-1}(\bigcup \mathcal{U}_x) = \bigcup \mathcal{V}, \end{aligned}$$

por lo que $\mathcal{V}$ es una cubierta abierta de K. Por compacidad existen $x_1, \ldots, x_n \in K$ tales que $K \subseteq \bigcup_{m \leq n} p^{-1}(\bigcup \mathcal{U}_{x_m})$. Finalmente

$$p(K) \subseteq p(\textstyle\bigcup_{m \leq n} p^{-1}(\bigcup \mathcal{U}_{x_m})) \subseteq \bigcup_{m \leq n} p(p^{-1}(\bigcup \mathcal{U}_{x_m})) \subseteq \bigcup_{m \leq n} \bigcup \mathcal{U}_{x_m},$$

donde $\bigcup_{m \leq n} \bigcup \mathcal{U}_{x_m} \subseteq \mathcal{U}$ es una subcubierta finita de $p(K)$.

(b) Sea $\mathcal{C}$ una cubierta compacta de K y $\mathcal{R}$ una red numerable con respecto a $\mathcal{C}$. Resulta que la familia $\mathcal{A} = \{p(C) : C \in \mathcal{C}\}$ es una cubierta compacta de $p(K)$ y $\mathcal{B} = \{p(R) : R \in \mathcal{R}\}$ es una red numerable con respecto a $\mathcal{A}$.
Para ver que $\mathcal{A}$ es una cubierta compacta de $p(K)$, basta aplicar **(a)** y observar que $p(K) = p(\bigcup \mathcal{C}) = \bigcup\{p(C) : C \in \mathcal{C}\} = \bigcup \mathcal{A}$.
Es claro que $\mathcal{B}$ es numerable, así que resta ver que $\mathcal{B}$ es una red con respecto a $\mathcal{A}$. Sean $A \in \mathcal{A}$ y $U \in \tau(A, p(K))$. Existe $V \in \tau(Y)$ tal que $V \cap p(K) = U$ y $C \in \mathcal{C}$ tal que $A = p(C)$. Se tiene que $C \subseteq p^{-1}(p(C)) = p^{-1}(A) \subseteq p^{-1}(V) \in \tau(X)$ por lo cual existe $R \in \mathcal{R}$ tal que $C \subseteq R \subseteq K \cap p^{-1}(V)$. Entonces, $p(R) \in \mathcal{B}$ y

$$A = p(C) \subseteq p(R) \subseteq p(K \cap p^{-1}(V)) \subseteq p(K) \cap p(p^{-1}(V)) \subseteq p(K) \cap V = U.$$

Lo anterior demuestra que $\mathcal{B}$ es una red con respecto a $\mathcal{A}$.

(c) Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de Y. Para cada $x \in X$ sea $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{U}$ una familia finita tal que $p(x) \subseteq \bigcup \mathcal{U}_x$. La familia $\mathcal{V} = \{p^{-1}(\bigcup \mathcal{U}_x) : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X. Existe $A \subseteq X$ tal que $|A| \leq l(X)$ y $\{p^{-1}(\bigcup \mathcal{U}_x) : x \in A\}$ es una cubierta de X. Luego $Y = p(X) = p(\bigcup_{x \in A} p^{-1}(\bigcup \mathcal{U}_x)) = \bigcup_{x \in A} p(p^{-1}(\bigcup \mathcal{U}_x)) \subseteq \bigcup_{x \in A} \bigcup \mathcal{U}_x = \bigcup(\bigcup_{x \in A} \mathcal{U}_x)$, por lo que $\bigcup_{x \in A} \mathcal{U}_x$ es una subcubierta de $\mathcal{U}$ y $|\bigcup_{x \in A} \mathcal{U}_x| \leq |A| \cdot sup\{|\mathcal{U}_x| : x \in A\} \leq l(X)$. Esto muestra que $l(Y) \leq l(X)$. ■

Un mapeo continuo y sobreyectivo $f : X \to Y$ se llama perfecto si f es un mapeo cerrado y para cada $y \in Y$, la fibra $f^{-1}(y)$ es un subespacio compacto de X.

Proposición 1.1.13. Sea $f : X \to Y$ un mapeo perfecto.

(a) El mapeo multivaluado $p : Y \to X$ definido por $p(y) = f^{-1}(y)$ para cada $y \in Y$, es un mapeo USCO.

(b) Si $F \subseteq X$ es un subespacio cerrado, entonces $f|_F : F \to f(F)$ es un mapeo perfecto, donde $f|_F$ es la restricción de f al subespacio F.

Demostración. **(a)** Es inmediato que el mapeo p es multivaluado y compacto-valuado. Veamos que p es superiormente semicontinuo. Si $U \in \tau(X)$, entonces

$$p^{-1}(U) = \{y \in Y : f^{-1}(y) \subseteq U\} = \{y \in Y : f^{-1}(y) \cap (X \backslash U) = \emptyset\} = Y \backslash f(X \backslash U) \in \tau(Y),$$

por lo que p es superiormente semicontinuo.

(b) El mapeo $f|_F$ es continuo y sobreyectivo. Para cada $y \in f(F)$, el conjunto $(f|_F)^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap F$ es compacto puesto que $f^{-1}(y) \cap F$ es cerrado en el compacto $f^{-1}(y)$. Si R es cerrado en F, entonces R es cerrado en X, por lo que $f|_F(R) = f(R)$ es cerrado en $f(F)$. ■

Proposición 1.1.14. Dados un espacio X y un espacio compacto K, la proyección natural $\pi : K \times X \to X$ es un mapeo perfecto.

Demostración. Por ser una proyección el mapeo π es continuo, sobreyectivo y cada fibra $\pi^{-1}(x) = K \times \{x\} \simeq K$ es compacta. Basta demostrar que π mapea cerrados en cerrados. Supongamos que F es un cerrado en $K \times X$ y $x \in X \backslash \pi(F)$; el conjunto $G = (K \times X) \backslash F$ es abierto en $K \times X$ y contiene al subespacio compacto $K \times \{x\}$. Para cada $y \in K$ sean $U(y) \in \tau(y, K)$ y $V(y) \in \tau(x, X)$ tales que $U(y) \times V(y) \subseteq G$. Por la compacidad de K existen $y_1, \ldots, y_n \in K$ para los cuales $K \times \{x\} \subseteq \bigcup_{i \leq n} U(y_i) \times V(y_i)$. Si $V = \bigcap_{i \leq n} V(y_i)$, entonces $K \times \{x\} \subseteq K \times V \subseteq G$, por lo que $V \cap \pi(F) = \emptyset$. Lo anterior demuestra que $\pi(F)$ es cerrado en X. ■

Dado un espacio X, una familia de espacios $\{Y_t : t \in T\}$ y un mapeo $f_t : X \to Y_t$ para cada $t \in T$, sea $f : X \to \prod_{t \in T} Y_t$ el mapeo definido por $f(x)(t) = f_t(x)$ para cada $x \in X$ y $t \in T$.

El mapeo f es llamado el producto diagonal de la familia $\mathcal{F} = \{f_t : t \in T\}$ y lo denotamos por $\triangle_{t\in T} f_t$ ó $\triangle\mathcal{F}$. Si el mapeo f_t es continuo para cada $t \in T$, entonces el mapeo $\triangle_{t\in T} f_t$ también es continuo.

Teorema 1.1.15. Dado un espacio X, un espacio Y es imagen de X bajo un mapeo perfecto si y sólo si existe un compacto K y un cerrado $P \subseteq K \times Y$ homeomorfo a X tal que $\pi(P) = Y$, donde $\pi : K \times Y \to Y$ es la proyección natural.

Demostración. Obsérvese que $\pi : K \times Y \to Y$ es un mapeo perfecto por la Proposición 1.1.14, luego $\pi|_P : P \to \pi(P) = Y$ es un mapeo perfecto por la Proposición 1.1.13 (b). Puesto que X es homeomorfo a P, se sigue que X se mapea perfectamente sobre Y. Esto prueba la suficiencia.
Para verificar la necesidad supongamos que $f : X \to Y$ es un mapeo perfecto. Asumamos que $X \subseteq \beta X$ y sea $i : X \to \beta X$ la función identidad. El mapeo $h = i \triangle f : X \to \beta X \times Y$ es continuo e inyectivo, puesto que la función i es inyectiva. Para ver que $h : X \to h(X)$ es un homeomorfismo basta demostrar que h mapea subconjuntos cerrados de X en cerrados de $h(X)$.
Sea F cerrado en X. Existe un conjunto F' cerrado en βX tal que $F = F' \cap X$, lo que implica que $h(X)\backslash h(F) = ((\beta X\backslash F') \times Y) \cap h(X) \in \tau(h(X))$, por lo que $h(F)$ es cerrado en $h(X)$. Por lo tanto $h : X \to h(X)$ es un homeomorfismo. Sea $P = h(X)$; puesto que el mapeo $f : X \to Y$ es sobreyectivo, tenemos que $\pi(P) = Y$. Para concluir demostraremos que P es cerrado en $\beta X \times Y$.
Sea $(z, y) \in (\beta X \times Y)\backslash P$; se sigue que $z \notin f^{-1}(y)$. Puesto que $f^{-1}(y)$ es compacto, es cerrado en βX. Por la regularidad de βX existen conjuntos disjuntos $U, V \in \tau(\beta X)$ tales que $z \in U$ y $f^{-1}(y) \subseteq V$. Puesto que f es un mapeo cerrado, el subconjunto $f(X\backslash V) = f(X\backslash(X \cap V))$ es cerrado en Y, luego $Y\backslash f(X\backslash V) \in \tau(Y)$. Como $f^{-1}(y) \subseteq V$, tenemos que $y \notin f(X\backslash V)$ y por tanto $y \in Y\backslash f(X\backslash V)$. Así $U \times (Y\backslash f(X\backslash V))$ es una vecindad de (z, y). Veamos que $U \times (Y\backslash f(X\backslash V))$ no interseca a P.
Sea $(z_0, y_0) \in U \times (Y\backslash f(X\backslash V))$. Si $z_0 \in \beta X\backslash X$, entonces $(z_0, y_0) \notin P$. Si $z_0 \in X$, entonces $f(z_0) \in f(U \cap X) \subseteq f(X\backslash V)$, luego $f(z_0) \neq y_0 \in Y\backslash f(X\backslash V)$, por lo que $(z_0, y_0) \notin P$. Por lo tanto $(U \times (Y\backslash f(X\backslash V))) \cap P = \emptyset$. ■

Teorema 1.1.16. Las siguientes condiciones son equivalentes para todo espacio X:
(a) X es un espacio Lindelöf Σ;
(b) Existe un mapeo USCO $\varphi : P \to X$ para algún subespacio P de ω^ω;
(c) Existe un mapeo USCO $\varphi : M \to X$ para algún espacio segundo numerable M;
(d) Existe un espacio segundo numerable M y un compacto K tal que X es la imagen continua de un subespacio cerrado de $K \times M$;
(e) Existe un espacio segundo numerable N y un espacio Y tal que N es una imagen perfecta de Y y X es una imagen continua de Y.

Demostración. **(a)⇒(b)** Sin pérdida de generalidad podemos asumir que X no es compacto. Por el Teorema 1.1.9 (c) existe una familia $\mathcal{C} = \{C_n : n < \omega\}$ de subconjuntos compactos de $K = \beta X$ que separan a X del residuo $K\backslash X$. Consideremos al subespacio $P = \{f \in \omega^\omega : \bigcap\{C_{f(n)} : n \in \omega\} \subseteq X\}$. Para cada $f \in P$ sea $\varphi(f) = \bigcap\{C_{f(n)} : n \in \omega\}$; es claro que el mapeo multivaluado $\varphi : P \to X$ es compacto-valuado.
Dado $x \in X$ definamos $f \in \omega^\omega$ como $f(n) = n$ si $x \in C_n$ y $f(n) = min\{m < \omega : x \in C_m\}$ si $x \notin C_n$. Entonces $A_x = \{n < \omega : x \in C_n\} = \{f(n) : n < \omega\}$. Puesto que $\mathcal{C}$ separa X de $K\backslash X$, el conjunto $\bigcap\{C_n : n \in A_x\}$ está contenido en X y por tanto $f \in P$; además $x \in \bigcap\{C_n : n \in A_x\} = \varphi(f)$, por lo que $\varphi(P) = X$, es decir, el mapeo φ es sobreyectivo.
Sean $f \in P$ y $U \in \tau(\varphi(f), X)$. Puesto que todos los elementos de $\bigcap\{C_{f(n)} : n \in \omega\}$ son

compactos y $\bigcap\{C_{f(n)} : n \in \omega\} \subseteq U$, se sigue que $\bigcap\{C_{f(n)} : n \leq m\} \subseteq U$ para algún $m < \omega$ [Tk7, Fact 1, S.256]. El conjunto $W = \{g \in P : g(n) = f(n)$ para cada $n \leq m\}$ es abierto en P y $\varphi(G) \subseteq U$, por lo que el mapeo φ es superiormente semicontinuo. Finalmente $\varphi : P \to X$ es un mapeo USCO y $P \subseteq \omega^\omega$.

(b)⇒(c) Basta tomar $M = P$.

(c)⇒(d) El conjunto $F = \bigcup\{\varphi(t) \times \{t\} : t \in M\}$ está contenido en $\beta X \times M$ y si $\pi : \beta X \times M \to \beta X$ es la proyección natural, entonces $\pi(F) = X$, por lo que X es una imagen continua de F.
Probemos que F es cerrado en $\beta X \times M$. Sea $(x, t) \in (\beta X \times M)\backslash F$; se sigue que $x \notin \varphi(t)$, por lo que existen conjuntos disjuntos $U, V \in \tau(\beta X)$ tales que $x \in U$ y $\varphi(t) \subseteq V$. Puesto que φ es superiormente semicontinua, existe $W \in \tau(t, M)$ tal que $\varphi(W) \subseteq V$. Es claro que $(x, t) \in U \times W \subseteq (\beta X \times M)\backslash F$, así que F es cerrado en $\beta X \times M$.

(d)⇒(e) Sea Y un conjunto cerrado en $K \times M$ tal que X es una imagen continua de Y. Si $\pi : K \times M \to M$ es la proyección natural, entonces por la Proposición 1.1.14, el mapeo π es perfecto. Por la Proposición 1.1.13, el mapeo $\pi|_Y : Y \to \pi|_Y(Y)$ es también perfecto. Hagamos $N = \pi|_Y(Y) \subseteq M$. Finalmente, el espacio segundo numerable N es una imagen perfecta de Y y X es una imagen continua de Y.

(e)⇒(a) Por el Teorema 1.1.15, existe un espacio compacto K y un subespacio cerrado $P \subseteq K \times N$ tal que P es homeomorfo a Y. Por el Corolario 1.1.5, los espacios K y N son Lindelöf Σ. Por la Proposición 1.1.7 (c), el espacio $K \times N$ es un espacio Lindelöf Σ. De nuevo, por la Proposición 1.1.7 (b) el espacio P al ser cerrado en $K \times N$, es Lindelöf Σ. El espacio Y, al ser homeomorfo a P, es Lindelöf Σ. Finalmente, por la Proposición 1.1.7 (a), el espacio X al ser imagen continua de Y, es Lindelöf Σ. ■

Teorema 1.1.17. Los espacios Lindelöf Σ forman la mínima clase que contiene a los espacios compactos, los espacios segundo numerables, y es invariante bajo subespacios cerrados, mapeos continuos y productos finitos.

Demostración. Digamos que una clase de espacios topológicos es completa si incluye a todos los espacios compactos, todos los espacios segundo numerables, es cerrada bajo subespacios cerrados, mapeos continuos y productos finitos. Sea $L\Sigma$ la mínima clase completa. Del Corolario 1.1.5 y la Proposición 1.1.7 se sigue que la clase de espacios Lindelöf Σ es una clase completa, y por lo tanto cada elemento de la clase $L\Sigma$ es un espacio Lindelöf Σ. Sea ahora X un espacio Lindelöf Σ. Por Teorema 1.1.16 (d), existe un espacio segundo numerable M, un espacio compacto K y un subespacio cerrado $F \subseteq K \times M$ tal que X es una imagen continua de F. Puesto que $L\Sigma$ es una clase completa, se sigue que $K, M \in L\Sigma$; por la misma razón $K \times M \in L\Sigma$. Como F es cerrado en $K \times M \in L\Sigma$, se tiene que $F \in L\Sigma$. Finalmente como X es imagen continua de $F \in L\Sigma$, se concluye que $X \in L\Sigma$. Por lo tanto cada espacio Lindelöf Σ pertenece a la clase $L\Sigma$. ■

Proposición 1.1.18 El producto numerable de espacios Lindelöf Σ es Lindelöf Σ.

Demostración. Para cada $n < \omega$ sea X_n un espacio Lindelöf Σ. Por el Teorema 1.1.16, para cada $n < \omega$ existe un espacio segundo numerable S_n, un espacio Y_n, un mapeo perfecto $p_n : Y_n \to S_n$ y un mapeo continuo y sobreyectivo $f_n : Y_n \to X_n$.
Sean $p = \prod_{n<\omega} p_n : \prod_{n<\omega} Y_n \to \prod_{n<\omega} S_n$ y $f = \prod_{n<\omega} f_n : \prod_{n<\omega} Y_n \to \prod_{n<\omega} X_n$. El espacio $\prod_{n<\omega} S_n$ es segundo numerable y p es un mapeo perfecto [Tk7, Fact 4, S.271]. Además, el mapeo f es continuo y sobreyectivo, y por lo tanto el Teorema 1.1.16 muestra que el espacio $\prod_{n<\omega} X_n$ es Lindelöf Σ. ■

Proposición 1.1.19 Si un espacio X es la unión numerable de espacios Lindelöf Σ, entonces X es Lindelöf Σ.

Demostración. Sea $X = \bigcup\{X_n : n < \omega\}$ donde, para todo $n < \omega$ el subespacio X_n es Lindelöf Σ. Para cada $n < \omega$ sea $\mathcal{C}_n$ una cubierta compacta de X_n y $\mathcal{R}_n \subseteq exp(X_n)$ una red numerable con respecto a $\mathcal{C}_n$. Hagamos $\mathcal{C} = \bigcup_{n<\omega} \mathcal{C}_n$ y $\mathcal{R} = \bigcup_{n<\omega} \mathcal{R}_n$. Es claro que $\mathcal{C}$ es una cubierta compacta de X y $\mathcal{R}$ es una red numerable con respecto a $\mathcal{C}$. ■

Proposición 1.1.20 En todo espacio la intersección numerable de subespacios Lindelöf Σ también es Lindelöf Σ.

Demostración. Dado un espacio Y supongamos que $X_n \subseteq Y$ es un subespacio Lindelöf Σ para cada $n < \omega$. Por [Tk7, Fact 7, S.271], el espacio $X = \bigcap_{n<\omega} X_n$ es homeomorfo a un subconjunto cerrado de $\prod_{n<\omega} X_n$ el cual es Lindelöf Σ por la Proposición 1.1.18. Por la Proposición 1.1.7 el espacio $X = \bigcap_{n<\omega} X_n$ es Lindelöf Σ. ■

Teorema 1.1.21 Si todos los subespacios compactos de un espacio Lindelöf Σ son finitos, entonces el espacio es numerable.

Demostración. Sea X un espacio Lindelöf Σ tal que cada subespacio compacto de X es finito. Existe una cubierta compacta $\mathcal{C}$ de X y una red numerable $\mathcal{F}$ con respecto a $\mathcal{C}$. Es claro que la familia $\mathcal{G} = \{G \in \bigwedge \mathcal{F} : |G| \leq \omega\}$ es numerable.
Supongamos, para obtener una contradicción, que X no es numerable. Sea $x \in X \backslash \bigcup \mathcal{G}$. Notemos que si $x \in G \in \bigwedge \mathcal{F}$, entonces $|G| > \omega$. Sea $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C$. Puesto que C es compacto, es finito. Consideremos a la familia $\mathcal{F}_C = \{F \in \mathcal{F} : C \subseteq F\}$; sea $\{F_n : n < \omega\}$ una numeración de $\mathcal{F}_C$. Para cada $n < \omega$ definamos $G_n = \bigcap_{i \leq n} F_i$. Tomemos $x_0 \in G_0 \backslash C$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ escojamos $x_n \in G_n \backslash (C \cup \{x_0, \ldots, x_{n-1}\})$. Entonces $S = \{x_n : n < \omega\} \subseteq X \backslash C$; sea $C = \{y_1, \ldots, y_k\}$ una numeración de C.
Si la sucesión $S_0 = S$ no converge a y_1, entonces existe $S_1 \in [S_0]^\omega$ tal que $y_1 \notin \overline{S_1}$.
Si la sucesión S_1 no converge a y_2, entonces existe $S_2 \in [S_1]^\omega$ tal que $y_2 \notin \overline{S_2}$.

$$\vdots$$

Si la sucesión S_{k-1} no converge a y_k, entonces existe $S_k \in [S_{k-1}]^\omega$ tal que $y_k \notin \overline{S_k}$.
Por tanto $\overline{S_k} \cap C = \emptyset$; entonces $X \backslash \overline{S_k} \in \tau(C, X)$ así que existe un elemento $F_m \in \mathcal{F}$ tal que $C \subseteq F_m \subseteq X \backslash \overline{S_k} \subseteq X \backslash S_k$. Para cada $n > m$ se tiene que $x_n \in F_m$, luego $S_k \cap F_m \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Esto muestra que existe $n < k$ tal que S_{n-1} converge a y_n. De modo que $S_{n-1} \cup \{y_n\}$ es compacto e infinito, lo que es de nuevo una contradicción. Por tal motivo X es numerable. ■

1.2. Estabilidad y D-espacios

En esta parte del capítulo presentamos un resultado de Buzyakova sobre la relación entre espacios Lindelöf Σ y D-espacios, así como un teorema de Arhangel'skii que establece que cualquier producto de espacios Lindelöf Σ es estable.

Dada una familia de espacios $\{X_a : a \in A\}$ y un subconjunto B de A definimos el mapeo restricción $p_B : \prod_{a\in A} X_a \to \prod_{a\in B} X_a$ por $p_B(x) = x|_B$ para cada $x \in \prod_{a\in A} X_a$. El mapeo restricción es abierto y sobreyectivo.
La familia $\{\prod_{a\in A} U_a : |\{a \in A : U_a \neq X_a\}| < \omega\}$ es una base para el espacio $\prod_{a\in A} X_a$, donde U_a es abierto en X_a para cada $a \in A$. Los elementos de esta base son conocidos como abiertos canónicos o estándares. Dado un abierto estándar $U = \prod_{a\in A} U_a$ definimos el soporte de U como $supp(x) = \{a \in A : U_a \neq X_a\}$.

Definición 1.2.1. Una asignación de vecindades para un espacio X es un mapeo $\varphi : X \to \tau(X)$ tal que $x \in \varphi(x)$ para cada $x \in X$.

Definición 1.2.2. Diremos que X es un D-espacio si para cada asignación φ de vecindades de X, tenemos que $X = \bigcup\{\varphi(x) : x \in D\}$ para algún subespacio cerrado y discreto D de X.

Proposición 1.2.3. Todo D-espacio numerablemente compacto es compacto.

Demostración. Sea X un D-espacio numerablemente compacto. Si $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X, para cada $x \in X$ existe $\varphi(x) \in \mathcal{U}$ tal que $x \in \varphi(x)$. Entonces φ es una asignación de vecindades de X, por lo que existe un conjunto cerrado y discreto en $D \subseteq X$ tal que $X = \bigcup\{\varphi(x) : x \in X\}$. Puesto que X es numerablemente compacto, el subespacio D es finito. Finalmente $\{\varphi(x) : x \in D\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$, lo que muestra que X es compacto. ■

Corolario 1.2.4. El ordinal ω_1 con la topología generada por su buen orden no es un D-espacio.

Demostración. El espacio ω_1 es numerablemente compacto pero no compacto. Por la Proposición 1.2.3 es inmediato que ω_1 no es un D-espacio. ■.

Teorema 1.2.5. Todo espacio Lindelöf Σ es un D-espacio.

Demostración. Sea X un espacio Lindelöf Σ y φ una asignación de vecindades en X. Para cada $A \subseteq X$ definamos $\varphi(A) = \bigcup_{x\in A} \varphi(x)$. Existe una cubierta compacta $\mathcal{C}$ de X y una red numerable $\mathcal{F}$ con respecto a $\mathcal{C}$. Construiremos por inducción un subespacio $D = \bigcup_{n<\omega} D_n$ testigo de que X es un D-espacio.
Sea $\mathcal{F} = \{F_k : k \in \omega\}$ una numeración de $\mathcal{F}$ tal que cada $F \in \mathcal{F}$ ocurre una cantidad infinita de veces en esta numeración. Diremos que $A \subseteq X$ es pequeño si existe $B \in [A]^{<\omega}$ tal que $A \subseteq \varphi(B)$; en este caso diremos que B es un núcleo de A.
Si F_0 es pequeño, sea D_0 un núcleo de F_0; en caso contrario sea $D_0 = \emptyset$. Supongamos que para algún $n < \omega$ tenemos conjuntos finitos $D_0, \dots, D_n$. Si $F_{n+1} \backslash \varphi(D_0 \cup \ldots \cup D_n)$ es pequeño, sea D_{n+1} un núcleo de este conjunto; en caso contrario hacemos $D_{n+1} = \emptyset$. Continuando por inducción obtenemos al conjunto $D = \bigcup_{n<\omega} D_n$.
Supongamos que $\varphi(D) \neq X$. Si $x \in X \backslash \varphi(D)$, existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C$. Como el conjunto $C \backslash \varphi(D)$ es compacto, es pequeño. Sea E un núcleo de $C \backslash \varphi(D)$. Entonces $C \subseteq \varphi(D) \cup \varphi(E)$, y en consecuencia, por la compacidad de C, existe $n < \omega$ tal que $C \subseteq \varphi(D_0 \cup \ldots \cup D_n) \cup \varphi(E)$. Existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $C \subseteq F \subseteq \varphi(D_0 \cup \ldots \cup D_n) \cup \varphi(E)$. Por la elección de nuestra numera-

ción de $\mathcal{F}$ podemos encontrar un $k > n$ tal que $F = F_k$; entonces $F_k \backslash \varphi(D_0 \cup \ldots \cup D_{k-1}) \subseteq F_k \backslash \varphi(D_0 \cup \ldots \cup D_n) \subseteq \varphi(E)$ y por lo tanto E es un núcleo de $F_k \backslash \varphi(D_0 \cup \ldots \cup D_{k-1})$, lo que implica que el conjunto $F_k \backslash \varphi(D_0 \cup \ldots \cup D_{k-1})$ es pequeño. Nuestra construcción inductiva garantiza que $F_k \backslash \varphi(D_0 \cup \ldots \cup D_{k-1}) \subseteq \varphi(D_k)$ por lo cual $x \in F_k \subseteq \varphi(D_0 \cup \ldots \cup D_k) \subseteq \varphi(D)$, lo que es una contradicción. Lo anterior muestra que $\varphi(D) = X$.
Veamos ahora que D es cerrado y discreto. Dado cualquier $x \in X$, demostraremos que x no es punto de acumulación de D. Sea $n < \omega$ tal que $x \in \varphi(D_n)$. Por construcción $\varphi(D_n) \cap D \subseteq D_n$, el cual es finito, por lo que $\varphi(D_n)$ es una vecindad de x que interseca a D en un numero finito de puntos, esto es x no es punto de acumulación de D. Como D no tiene puntos de acumulación, es discreto y cerrado. ■

Corolario 1.2.6 Todo espacio σ-compacto ó con peso de red numerable es un D-espacio.

Definición 1.2.7. Dada una familia de espacios $\{X_t : t \in T\}$ y $a \in X = \prod_{t \in T} X_t$, definimos a los subespacios

$$\sigma(X, a) = \{x \in X : |\{t \in T : x(t) \neq a(t)\}| < \omega\}$$
$$\Sigma(X, a) = \{x \in X : |\{t \in T : x(t) \neq a(t)\}| \leq \omega\}.$$

Al espacio $\sigma(X, a)$ lo llamaremos el σ-producto de X con el centro en a; análogamente $\Sigma(X, a)$ es el Σ-producto de X con el centro en a.

Proposición 1.2.8. Sea Y un subespacio arbitrario de un producto $\prod_{a \in A} X_a$. Dado un abierto estándar $U \subseteq X$ fijémonos en el conjunto $V = U \cap Y$. Si $B \subseteq A$ y $supp(U) \subseteq B$, entonces $p_B(V)$ es abierto en $p_B(Y)$, donde $p_B : \prod_{a \in A} X_a \to \prod_{a \in B} X_a$ es el mapeo restricción; además, para cada $y \in Y$ si $p_B(y) \in p_B(V)$, entonces $y \in V$.

Demostración. Tenemos que $U = \prod_{a \in A} U_a$ donde $U_a \neq X_a$ solamente para una cantidad finita de $a \in A$. El conjunto $W = \prod_{a \in B} U_a$ es abierto en $X_B = \prod_{a \in B} X_a$. La contención $supp(U) \subseteq B$ implica que $W \cap p_B(Y) = p_B(V)$, lo cual muestra que $p_B(V)$ es abierto en $p_B(Y)$.
Si $y \in Y$ es tal que $z = p_B(y) \in p_B(V)$, entonces $z \in W$ y por tanto $y(a) = z(a) \in U_a$ para cada $a \in B$. Puesto que $U_a = X_a$ para cada $a \in A \backslash B$, tenemos que $y(a) \in U_a$ para todo $a \in A$ y por tanto $y \in U$. Finalmente $y \in U \cap Y = V$. ■

Teorema 1.2.9. Si $\{X_t : t \in T\}$ es una familia de espacios tal que para cada conjunto finito $A \subseteq T$ el producto $\prod_{t \in A} X_t$ es Lindelöf, entonces para todo $a \in X = \prod_{t \in T} X_t$ el espacio $\sigma(X, a)$ es Lindelöf.

Demostración. Sean $\sigma = \sigma(X, a)$ y $supp(x) = \{t \in T : x(t) \neq a(t)\}$ para cualquier $x \in X$. Notemos que $\sigma = \bigcup_{n < \omega} \sigma_n$ donde $\sigma_n = \{x \in \sigma : |supp(x)| \leq n\}$ para cada $n < \omega$. Basta demostrar que σ_n es Lindelöf para todo $n < \omega$. Demostraremos lo anterior por inducción. Si $n = 0$, entonces $\sigma_0 = \{a\}$ es Lindelöf. Supongamos que $n > 0$ y hemos demostrado que σ_{n-1} es Lindelöf.
Sea $\mathcal{B}$ la base de abiertos estándares en X. Para demostrar que σ_n es Lindelöf basta comprobar que para cada $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $\sigma_n \subseteq \bigcup \mathcal{U}$, existe una subfamilia numerable $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ para la cual $\sigma_n \subseteq \bigcup \mathcal{U}'$. Supongamos que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$ y $\sigma_n \subseteq \bigcup \mathcal{U}$.
Por la hipótesis de inducción existe una subfamilia numerable $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ tal que $\sigma_{n-1} \subseteq \bigcup \mathcal{V}$. Es claro que $A = \bigcup \{supp(V) : V \in \mathcal{V}\}$ es numerable. Veamos que

$(*)$ $supp(x) \subseteq A$ para cada $x \in \sigma_n \backslash \bigcup \mathcal{V}$.

Supongamos lo contrario y sea $t_0 \in supp(x) \backslash A$ para algún $x \in \sigma_n \backslash \bigcup \mathcal{V}$. Definamos $y(t) = x(t)$ para todo $t \in T \backslash \{t_0\}$ y $y(t_0) = a(t_0)$. Entonces $y \in \sigma_{n-1} \subseteq \bigcup \mathcal{V}$, por lo que existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $y \in V$. Tenemos que $supp(V) \subseteq A$ así que la Proposición 1.2.8 implica que

$p_A^{-1}(p_A(V)) = V$. Puesto que $p_A(x) = p_A(y) \in p_A(V)$, tenemos que $x \in V \subseteq \bigcup \mathcal{V}$ lo que es una contradicción. Por lo tanto $supp(x) \subseteq A$ para cada $x \in \sigma_n \setminus \bigcup \mathcal{V}$.
Se sigue de $(*)$ que $P = \sigma_n \setminus \bigcup \mathcal{V} \subseteq Q = \sigma_n \cap (X_A \times \{p_{T\setminus A}(a)\})$ donde $X_A = \prod_{t \in A} X_t$. Es inmediato que el mapeo $p_A|_Q : Q \to \sigma(n, A)$ es un homeomorfismo, donde $\sigma(n, A) = \{y \in X_A : |\{t \in A : y(t) \neq a(t)\}| \leq n\}$. Es fácil ver que se satisface la igualdad $\sigma(n, A) = \bigcup \{X_B \times \{p_{A\setminus B}(a)\} : B \in [A]^{\leq n}\}$. Puesto que para cada $B \in [A]^{\leq n}$, el espacio $X_B \times \{p_{A\setminus B}(a)\}$ es homeomorfo a X_B y $l(X_B) \leq \omega$ por hipótesis, el conjunto $\sigma(n, A)$ es Lindelöf al ser unión numerable de espacios Lindelöf. Como Q es homeomorfo a $\sigma(n, A)$, es también un espacio Lindelöf. El espacio P es cerrado en σ_n y $P \subseteq Q \subseteq \sigma_n$, lo cual implica que P es cerrado en Q y en consecuencia es Lindelöf. Luego existe una familia numerable $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$ tal que $P \subseteq \bigcup \mathcal{W}$. Es claro que $\mathcal{U}' = \mathcal{V} \cup \mathcal{W}$ es numerable y $\sigma_n \subseteq \bigcup \mathcal{U}'$. ■

Teorema 1.2.10. Supongamos que κ es un cardinal infinito, $\{X_t : t \in T\}$ es una familia de espacios y L es un subespacio de $X = \prod_{t \in T} X_t$ tal que $l(L) \leq \kappa$. Entonces para cada espacio segundo numerable M y todo mapeo continuo $f : L \to M$, existe $S \in [T]^{\leq \kappa}$ y un mapeo continuo $g : p_S(L) \to M$ tal que $f = g \circ (p_S|_L)$.

Demostración. Diremos que un abierto V en L es L-estandar si existe un abierto estandar U en X tal que $V = U \cap L$. Es claro que los abiertos L-estandar forman una base en L.
Sea $\mathcal{O} = \{O_n : n < \omega\}$ base numerable en M. Por regularidad cada $O \in \mathcal{O}$ es un abierto F_σ, lo cual muestra que $H_n = f^{-1}(O_n)$ es un abierto F_σ en L para cada $n < \omega$. Puesto que todo H_n es una unión numerable de subespacios cerrados de L, se tiene que $l(H_n) \leq l(L) \leq \kappa$ para cada $n < \omega$.
Como los abiertos L-estándares forman una base en L, para cada $n < \omega$ existe una familia de abiertos L-estándares $\{H_\alpha^n : \alpha < \kappa\}$ tal que $H_n = \bigcup_{\alpha < \kappa} H_\alpha^n$.
Para cualesquiera $n < \omega$ y $\alpha < \kappa$ tomemos un abierto estándar G_α^n en el espacio X tal que $H_\alpha^n = G_\alpha^n \cap L$. Veamos que $S = \bigcup \{supp(G_\alpha^n) : n < \omega, \alpha < \kappa\}$ es el conjunto prometido.
Es inmediato que $|S| \leq \kappa$.

Afirmación 1. Si $x, y \in L$ y $p_S(x) = p_S(y)$, entonces $f(x) = f(y)$.

Si $f(x) \neq f(y)$, entonces existe $n < \omega$ tal que $f(x) \in O_n$ y $f(y) \notin O_n$, lo cual implica que $x \in H_n$ y $y \notin H_n$. Elijamos un $\alpha < \kappa$ tal que $x \in H_\alpha^n$; es claro que $y \notin H_\alpha^n$. Notemos que G_α^n es un abierto estandar en X tal que $supp(G_\alpha^n) \subseteq S$ y $G_\alpha^n \cap L = H_\alpha^n$; puesto que $p_S(y) = p_S(x) \in p_S(H_\alpha^n)$, por la Proposición 1.2.8 concluimos que $y \in H_\alpha^n$ lo que es una contradicción. Por lo tanto $f(x) = f(y)$. □

Dado cualquier $y \in p_S(L)$, hagamos $g(y) = f(x)$ donde $x \in p_S^{-1}(y)$ es arbitrario. Aplicando la *Afirmación 1* vemos que la definición de g es coherente. Como consecuencia inmediata de la definición de g se tiene que $g \circ (p_S|_L) = f$. Para cerciorarnos de que g es continua, basta demostrar que $g^{-1}(O)$ es abierto en $p_S(L)$ para cada $O \in \mathcal{O}$. Si $n < \omega$, entonces $f^{-1}(O_n) = H_n = \bigcup_{\alpha<\kappa} H_\alpha^n = \bigcup_{\alpha<\kappa} G_\alpha^n \cap L$. Por la Proposición 1.2.8, el conjunto $p_S(G_\alpha^n \cap L)$ es abierto en $p_S(L)$ para cada $\alpha < \kappa$; luego $g^{-1}(O_n) = p_S(\bigcup_{\alpha<\kappa} G_\alpha^n \cap L) = \bigcup_{\alpha<\kappa} p_S(G_\alpha^n \cap L)$ es abierto en $p_S(L)$. Por lo tanto $g^{-1}(O)$ es abierto en $p_S(L)$ para cada $O \in \mathcal{O}$. ■

Proposición 1.2.11. Sea κ un cardinal infinito. Dado un espacio X_t para cada $t \in T$, hagamos $X = \prod_{t \in T} X_t$ y concideremos para cada $A \subseteq T$, el mapeo restricción $p_A : X \to \prod_{t \in A} X_t$. Si L es un subespacio Lindelöf de X y $f : L \to M$ es un mapeo continuo y sobreyectivo tal que $w(M) \leq \kappa$, entonces existe $S \in [T]^{\leq \kappa}$ y un mapeo continuo $g : p_S(L) \to M$ para el cual $f = g \circ (p_S|_L)$.

Demostración. Si $A \subseteq B \subseteq T$, denotemos por $p_A^B : \prod_{t \in B} X_t \to \prod_{t \in A} X_t$ al mapeo restricción; el mapeo p_A^B es abierto y $p_A^B \circ p_B = p_A$.

Como M se encaja en $\mathbb{R}^\kappa$ [En, Theorem 2.3.23], sin pérdida de generalidad podemos suponer que $M \subseteq \mathbb{R}^\kappa$. Para cada $\alpha < \kappa$ sea $\pi_\alpha : \mathbb{R}^\kappa \to \mathbb{R}$ la proyección natural sobre el α-ésimo factor y $q_\alpha = \pi_\alpha|_M$; apliquemos el Teorema 1.2.10 a cada mapeo $f_\alpha = q_\alpha \circ f : L \to \mathbb{R}$ para obtener un conjunto numerable $S_\alpha \subseteq T$ y una función continua $g_\alpha : p_{S_\alpha}(L) \to \mathbb{R}$ tal que $f_\alpha = g_\alpha \circ (p_{S_\alpha}|_L)$. Afirmamos que $S = \bigcup_{\alpha<\kappa} S_\alpha$ es el conjunto prometido.
En efecto, dado $z \in p_S(L)$, sea $g(z)(\alpha) = g_\alpha(z|_{S_\alpha})$ para cada $\alpha < \kappa$; lo anterior define un mapeo $g : p_S(L) \to \mathbb{R}^\kappa$. Es claro que $g = \triangle\{g_\alpha \circ (p^S_{S_\alpha}|_{p_S(L)}) : \alpha < \kappa\}$, por lo que el mapeo g es continuo. Si $y \in L$ y $\alpha < \kappa$, entonces $f(y)(\alpha) = q_\alpha(f(y)) = f_\alpha(y) = g_\alpha(p_{S_\alpha}(y)) = g_\alpha(p^S_{S_\alpha}(p_S(y))) = g(p_S(y))(\alpha)$; luego $f(y) = g(p_S(y))$ para cada $y \in L$, y por lo tanto $f = g \circ (p_S|_L)$. ■

Proposición 1.2.12. Dada una familia de espacios $\{X_t : t \in T\}$, consideremos al espacio $X = \prod_{t\in T} X_t$, un subconjunto $S \subseteq T$, un punto $a \in X$ y $Y \in \{\sigma(X,a), \Sigma(X,a)\}$. Entonces $p_S|_Y : Y \to p_S(Y)$ es un mapeo abierto.

Demostración. Sea $U = \prod_{t\in T} U_t$ un abierto estándar en X. Veamos que $p_S(U \cap Y)$ es abierto en $p_S(Y)$. Basta demostrar que $p_S(U) \cap p_S(Y) \subseteq p_S(U \cap Y)$.
Sean $x \in U$ y $z \in Y$ tales que $p_S(x) = p_S(z)$. Definamos $y \in X$ de la siguiente forma: $y(t) = x(t)$ si $t \in \mathit{supp}(U)\backslash S$ y $y(t) = z(t)$ si $t \in T\backslash(\mathit{supp}(U)\backslash S)$.
El conjunto $\{t \in T : y(t) \neq z(t)\}$ es finito, lo cual implica que $y \in Y$. Si $t \in \mathit{supp}(U)\backslash S$, entonces $y(t) = x(t) \in U_t$; si $t \in \mathit{supp}(U) \cap S$, entonces $y(t) = z(t) = x(t) \in U_t$, y por tanto $y \in U$, mismo que muestra que $y \in U \cap Y$. Finalmente, como $p_S(y) = p_S(z) = p_S(x)$, se sigue que $p_S(U) \cap p_S(Y) \subseteq p_S(U \cap Y)$. ■

Teorema 1.2.13. Sea κ un cardinal infinito. Dado un espacio X_t para cada $t \in T$, consideremos $X = \prod_{t\in T} X_t$, un punto $a \in X$ y $Y \in \{\sigma(X,a), \Sigma(X,a)\}$. Supongamos que $\prod_{t\in A} X_t$ es Lindelöf para cada conjunto finito $A \subseteq T$. Entonces para cada espacio M con $w(M) \leq \kappa$ y todo mapeo continuo $f : Y \to M$, existe $S \in [T]^{\leq\kappa}$ y un mapeo continuo $g : p_S(Y) \to M$ tal que $f = g \circ (p_S|_Y)$.

Demostración. Si $Y = \sigma(X,a)$, entonces por el Teorema 1.2.9, el espacio Y es Lindelöf. Por la Proposición 1.2.11, existen $S \in [T]^{\leq\kappa}$ y un mapeo continuo $g : p_S(Y) \to M$ que satisfacen $f = g \circ (p_S|_Y)$.

Supongamos ahora que $Y = \Sigma(X,a)$. Por el resultado probado para $\sigma(X,a)$, existen un conjunto $S \in [T]^{\leq\kappa}$ y una función continua $g_1 : p_S(\sigma(X,a)) \to M$ tales que $g_1 \circ (p_S|_{\sigma(X,a)}) = f|_{\sigma(X,a)}$. Tomemos cualesquiera $x, y \in \Sigma(X,a)$ para los cuales $p_S(x) = p_S(y)$; tenemos que $\mathit{supp}(x) \cap S = \mathit{supp}(y) \cap S$, por lo que podemos escoger conjuntos $P = \{t_i : i < \omega\} \subseteq T$ y $Q = \{s_i : i < \omega\} \subseteq T$ tales que $\mathit{supp}(x) \subseteq P$ y $\mathit{supp}(y) \subseteq Q$, mientras que para todo $i < \omega$ se cumple $t_i = s_i$ si y sólo si $t_i \in S$ ó $s_i \in S$. Para cada $i < \omega$ definamos puntos $x_i, y_i \in \sigma(X,a)$ como sigue: $x_i(t) = x(t)$ si $t \in \{t_k : k \leq i\}$ y $x_i(t) = a(t)$ si $t \in T\backslash\{t_k : k \leq i\}$; análogamente $y_i(t) = y(t)$ si $t \in \{s_k : k \leq i\}$ y $y_i(t) = a(t)$ si $t \in T\backslash\{s_k : k \leq i\}$.
Es inmediato que $x_i, y_i \in \sigma(X,a)$ y $p_S(x_i) = p_S(y_i)$ para cada $i < \omega$; además, la sucesión $\{x_i : i < \omega\}$ converge a x y $\{y_i : i < \omega\}$ converge a y, por nuestra elección de P y Q. La igualdad $p_S(z) = p_S(z')$ implica que $f(z) = f(z')$ para cualesquiera $z, z' \in \sigma(X,a)$, así que $f(x_i) = f(y_i)$ para todo $i < \omega$ y por tanto $f(x) = f(y)$ por la continuidad de f.
Hemos demostrado que $p_S(x) = p_S(y)$ implica que $f(x) = f(y)$ si $x, y \in \Sigma(X,a)$. Como consecuencia existe un mapeo $g : p_S(\Sigma(X,a)) \to M$ tal que $f = g \circ (p_S|_{\Sigma(X,a)})$. Por Teorema 1.2.12 el mapeo $p_S|_{\Sigma(X,a)}$ es abierto y por tanto cociente. Finalmente, como $f = g \circ (p_S|_{\Sigma(X,a)})$ es continuo y $p_S|_{\Sigma(X,a)}$ es cociente, se sigue que g es continuo. ■

Teorema 1.2.14. Sea κ un cardinal infinito. Dado un espacio X_t para cada $t \in T$, hagamos $X = \prod_{t\in T} X_t$. Supongamos que $\prod_{t\in A} X_t$ es Lindelöf para cada conjunto finito $A \subseteq T$. Entonces para cada espacio M con $w(M) \leq \kappa$ y todo mapeo continuo $f : X \to M$, existe $S \in [T]^{\leq\kappa}$ y una función continua $g : p_S(X) \to M$ tal que $f = g \circ p_S$.

Demostración. *Paso 1:* Primero asumamos que $\kappa = \omega$. Escojamos $a \in X$ arbitrariamente y hagamos $\Sigma = \Sigma(X, a)$. Por el Teorema 1.2.13 existe un conjunto numerable $S \subseteq T$ y una función continua $g : p_S(\Sigma) \to M$ tales que $f|_\Sigma = g \circ p_S|_\Sigma$; puesto que S es numerable, se sigue que $p_S(\Sigma) = X_S = \prod_{t\in S} X_t$. Para cada $x \in X$ definamos $h(x) = g \circ p_S(x)$; entonces $h : X \to M$ es continua y $f|_\Sigma = h|_\Sigma$. Puesto que Σ es denso en X, tenemos la igualdad $f = h$, y por lo tanto $f = g \circ p_S$.
Paso 2: Supongamos ahora que $\kappa \geq \omega_1$. Puesto que $w(X) \leq \kappa$, podemos asumir que $M \subseteq \mathbb{R}^\kappa$ [En, Theorem 2.3.23]. Para cada $\alpha < \kappa$ sea $\pi_\alpha : \mathbb{R}^\kappa \to \mathbb{R}$ la proyección natural de $\mathbb{R}^\kappa$ en su α-ésimo factor, y hagamos $q_\alpha = \pi_\alpha|_M$. Dado $\alpha < \kappa$ podemos aplicar el resultado obtenido en el *Paso 1* al mapeo $f_\alpha = q_\alpha \circ f$ para encontrar un conjunto numerable $S_\alpha \subseteq T$ y un mapeo continuo $g_\alpha : X_{S_\alpha} \to \mathbb{R}$ tales que $f_\alpha = g_\alpha \circ p_{S_\alpha}$. Afirmamos que $S = \bigcup_{\alpha<\kappa} S_\alpha$ es el conjunto prometido.
Es evidente que $|S| \leq \kappa$. Dado $z \in X_S$, definamos $g(z)(\alpha) = g_\alpha \circ p^S_{S_\alpha}(z)$ para cada $\alpha < \kappa$; esto define un mapeo $g : X_S \to \mathbb{R}^\kappa$. Obviamente $g = \triangle\{g_\alpha \circ p^S_{S_\alpha} : \alpha < \kappa\}$ por lo que el mapeo g es continuo. Dado $y \in X$ y $\alpha < \kappa$ tenemos que $f(y)(\alpha) = q_\alpha(f(y)) = f_\alpha(y) = g_\alpha(p_{S_\alpha}(y)) = g_\alpha(p^S_{S_\alpha}(p_S(y))) = g(p_S(y))(\alpha)$, de donde se desprende que $f(y) = g(p_S(y))$. Por lo tanto $f = g \circ p_S$. ■

Dados espacios X y Y diremos que X se condensa en Y si existe una biyección continua $f : X \to Y$; al mapeo f se le conoce como condensación. Definimos el *i-peso* de espacio X como $iw(X) = min\{w(Y) : X \text{ se condensa en } Y\} + \omega$.

Definición 1.2.15. Dado un cardinal infinito κ, un espacio X es κ-estable si $iw(Y) \leq \kappa$ implica que $nw(Y) \leq \kappa$ para cada imagen continua Y de X. Diremos que X es estable si es κ-estable para todo cardinal infinito κ.

Proposición 1.2.16. Supongamos que κ un cardinal infinito.
(a) Toda imagen continua de un espacio κ-estable es κ-estable.
(b) Los subespacios abierto-cerrados de un espacio κ-estable son κ-estables.
(c) Si un espacio se puede expresar como una unión de κ espacios κ-estables, entonces es κ-estable.

Demostración. (a) Sea X un espacio κ-estable y Y una imagen continua de X. Supongamos que Z es una imagen continua de Y tal que $iw(Z) \leq \kappa$. Basta demostrar que $nw(Z) \leq \kappa$. Como Y es una imagen continua de X, el espacio Z una es imagen continua de X. Por la κ-estabilidad de X se concluye que $nw(Z) \leq \kappa$.

(b) Sea X un espacio κ-estable y $A \subseteq X$ un subespacio abierto-cerrado. Notemos que A una es imagen continua de X. Por **(a)** concluimos que A es κ-estable.

(c) Sea $X = \bigcup_{\alpha<\kappa} X_\alpha$, donde X_α es un espacio κ-estable para cada $\alpha < \kappa$. Supongamos que $f : X \to Y$ es un mapeo continuo y sobreyectivo, y además $iw(Y) \leq \kappa$. Basta demostrar que $nw(Y) \leq \kappa$.
Entonces $Y = f(X) = \bigcup_{\alpha<\kappa} f(X_\alpha)$ donde cada $Y_\alpha = f(X_\alpha)$ es un espacio κ-estable para cada $\alpha < \kappa$. Es claro que $iw(Y_\alpha) \leq iw(Y) \leq \kappa$ y en consecuencia $nw(Y_\alpha) \leq \kappa$ para cada $\alpha < \kappa$. Finalmente, el espacio Y es una unión de κ espacios con peso de red a lo más κ, lo que implica que $nw(Y) \leq \kappa$. ■

Ejemplo 1.2.17. La recta de Sorgenfrey $\mathcal{S}$ es un espacio con peso de red no numerable. La función identidad $i : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ es una condensacion, y por lo tanto $iw(\mathcal{S}) = \omega < nw(\mathcal{S})$; lo anterior demuestra que la recta de Sorgenfrey es un espacio Lindelöf pero no estable.

Teorema 1.2.18. Todo espacio Lindelöf Σ es estable.

Demostración. Supongamos que κ es un cardinal infinito y X un espacio Lindelöf Σ. Puesto que las imagenes continuas de un espacio Lindelöf Σ son Lindelöf Σ, sin pérdida de generalidad podemos asumir que $iw(X) \leq \kappa$. Basta demostrarse que $nw(X) \leq \kappa$.
Sea Y un espacio tal que $w(Y) = iw(X)$ y existe una condensación $f : X \to Y$. Podemos encontrar una base $\mathcal{B}$ de Y tal que $|\mathcal{B}| \leq \kappa$. Consideremos a la familia $\mathcal{F} = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$; es claro que para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existen conjuntos disjuntos $F, G \in \mathcal{F}$ tales que $x \in F$ y $y \in G$.
Elijamos una cubierta compacta $\mathcal{C}$ de X y una red numerable $\mathcal{R}$ con respecto a $\mathcal{C}$. Sea $\mathcal{N} = \bigwedge(\mathcal{F} \cup \mathcal{R})$; es claro que $|\mathcal{N}| \leq \kappa$. Basta demostrar que $\mathcal{N}$ es una red en X.
Sean $x \in X$ y $U \in \tau(x, X)$. Existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C$; el conjunto $C \backslash U$ es compacto, así que para cada $y \in C\backslash U$ existen conjuntos disjuntos $F_y, G_y \in \mathcal{F}$ tales que $y \in F_y$ y $x \in G_y$. Por la compacidad de $C\backslash U$ existe un subconjunto finito $A \subseteq C\backslash U$ tal que $C\backslash U \subseteq \bigcup\{F_y : y \in A\}$. Tomemos un conjunto $R \in \mathcal{R}$ tal que $C \subseteq R \subseteq U \cup \bigcup\{F_y : y \in A\}$ y consideremos $N = R \cap \bigcap\{G_y : y \in A\} \in \mathcal{N}$. Entonces $N \subseteq R \subseteq U \cup \bigcup_{y\in A} F_y$ y $N \cap \bigcup_{y\in A} F_y \subseteq \bigcap_{y\in A} G_y \cap \bigcup_{y\in A} F_y = \emptyset$, esto es $N \subseteq U$. Finalmente, $x \in N \subseteq U$ y $N \in \mathcal{N}$; de aquí se concluye que $\mathcal{N}$ es una red en X. ■

Corolario 1.2.19. Todo espacio σ-compacto ó con peso de red numerable es estable.

Teorema 1.2.20. Cualquier producto y cualquier σ-producto de espacios Lindelöf Σ es estable. Además, todo Σ-producto de espacios Lindelöf Σ es ω-estable.

Demostración. Supongamos que $\{X_t : t \in T\}$ es una familia de espacios Lindelöf Σ y $a \in X = \prod_{t\in T} X_t$ es un punto arbirtrario.

- $\sigma = \sigma(X, a)$ es estable.

Sea κ un cardinal infinito; veamos que σ es κ-estable. Tomemos una imagen continua Z de σ y un espacio M tal que $w(M) \leq \kappa$ y Z se condensa sobre M. Fijémonos en un mapeo continuo y sobreyectivo $f : \sigma \to Z$ y una condensación $h : Z \to M$. Por el Teorema 1.2.13, existe $S \in [T]^{\leq\kappa}$ y un mapeo continuo $g : p_S(\sigma) \to M$ tales que $h \circ f = g \circ (p_S|_\sigma)$. Por la Proposición 1.2.12, el función $p_S|_\sigma$ es abierta y en particular, cociente. Consideremos el mapeo $\varphi = h^{-1} \circ g$; como $\varphi \circ p_S|_\sigma = f$ es continuo, se sigue que φ es continuo. Entonces Z es una imagen continua de $p_S(\sigma)$.
Para cada $A \subseteq S$ sea $Q_A = X_A \times \{p_{S\backslash A}(a)\}$, donde $X_A = \prod_{t\in A} X_t$; es claro que Q_A es homeomorfo a X_A. Notemos que $p_S(\sigma) = \bigcup\{Q_A : A \in [S]^{<\omega}\}$. Para cada $A \in [S]^{<\omega}$, el subespacio $Q_A \simeq X_A$ es Lindelöf Σ; esto implica que el espacio $p_S(\sigma)$ es una unión de κ espacios estables. Por la Proposición 1.2.16 el espacio $p_S(\sigma)$ es κ-estable. Puesto que Z es una imagen continua de $p_S(\sigma)$ y $\kappa \geq w(M) \geq iw(Z)$; tenemos que $nw(Z) \leq \kappa$, lo que demuestra que σ es κ-estable.

- X es estable.

Para probar que X es κ-estable aplicaremos el Teorema 1.1.16 que dice que, para cada $t \in T$ existe un espacio Y_t y un espacio segundo numerable L_t tal que X_t es una imagen continua de Y_t y L_t es una imagen perfecta de Y_t. Entonces X es una imagen continua de $Y = \prod_{t\in T} Y_t$ [Tk7, Fact 1, S.271]. Puesto que toda imagen continua de espacio κ-estable es κ-estable, basta demostrar que Y es κ-estable. Esto muestra que sin pérdida de generalidad podemos

asumir que $X = Y$.
Supongamos que $f : X \to Z$ es un mapeo continuo y sobreyectivo, y $h : Z \to M$ es una condensación tal que $w(M) \leq \kappa$. Por el Teorema 1.2.14 existe $S \in [T]^{\leq\kappa}$ y un mapeo continuo $g : X_S \to M$ tal que $h \circ f = g \circ p_S$.
El mapeo $\varphi = h^{-1} \circ g$ es continuo puesto que $\varphi \circ p_S = f$ es continuo y p_S es un mapeo abierto. Entonces el espacio Z es una imagen continua de X_S. Para cada $t \in T$ sea $r_t : X_t \to L_t$ un mapeo perfecto. El mapeo $r = \prod_{t\in S} r_t : X_S \to L = \prod_{t\in S} L_t$ es perfecto [Tk7, Fact 4, S.271]. Puesto que el espacio L_t es segundo numerable para cada $t \in T$, tenemos que $w(L) \leq \kappa$ [En, Theorem 2.3.13].
Observemos que $\xi = r \triangle g$ es perfecto [En, Theorem 3.7.11] y mapea X_S sobre un subespacio F de $L \times M$; es claro que $w(F) \leq \kappa$. Sea $q : L \times M \to M$ la proyección natural y $\pi = q|_F$. El mapeo $g : X_S \to M$ es sobreyectivo y $F = (r \triangle g)(X_S)$; entonces $\pi(F) = M$, y por tanto la función $u = h^{-1} \circ \pi : F \to Z$ es sobreyectiva.
El mapeo $\varphi = u \circ \xi$ es continuo y ξ es un mapeo cociente; por lo tanto, la función u es continua. Entonces el espacio Z es una imagen continua de F; por consiguiente $nw(Z) \leq nw(F) \leq w(F) \leq \kappa$. De lo anterior concluimos que X es κ-estable.

• $\Sigma = \Sigma(X, a)$ es ω-estable.
Supongamos que Z es una imagen continua de Σ tal que $iw(Z) \leq \omega$. Basta demostrar que $nw(Z) \leq \omega$.
Sea $h : Z \to M$ una condensación tal que $w(M) \leq \omega$. Por el Teorema 1.2.13 existe $S \in [T]^{\leq\omega}$ y un mapeo continuo $g : p_S(\Sigma) \to M$ tal que $h \circ f = g \circ (p_S|_\Sigma)$. Por la Proposición 1.2.12, el mapeo $p_S|_\Sigma$ es cociente. La función $(h^{-1} \circ g) \circ (p_S|_\Sigma)$ es continua; por consiguiente, el mapeo $\varphi = h^{-1} \circ g$ es continuo. Entonces, Z es una imagen continua de $p_S(\Sigma) = \prod_{t\in S} X_t$. Por la Proposición 1.1.18, el espacio $\prod_{t\in S} X_t$ es Lindelöf Σ y en consecuencia Z es un espacio Lindelöf Σ. Por el Teorema 1.2.18, el espacio Z es estable, lo cual muestra que $nw(Z) \leq iw(Z) = \omega$. ■

1.3. Bases punto-numerables, diagonales pequeñas y sucesiones libres

El material de esta sección contiene un teorema de Chaber sobre los espacios Lindelöf Σ con bases punto-numerables, así como dos teoremas de Shapirovsky que establecen condiciones suficientes para que un subconjunto cerrado de un espacio compacto se mapee continuamente sobre un cubo de Cantor. Bajo la Hipótesis del Continuo, demostramos el Teorema de Juhász y Szentmiklóssy sobre la estrechez de un espacio compacto con diagonal pequeña y el teorema de Gruenhage sobre el peso de red de un espacio Lindelöf Σ con diagonal pequeña.

Definición 1.3.1. Sea X un espacio. Diremos que una familia $\mathcal{A} \subseteq exp(X)$ es *punto-numerable* si $|\{A \in \mathcal{A} : x \in A\}| \leq \omega$ para cada $x \in X$. Una base punto-numerable para un espacio es una base que también es una familia punto-numerable.

Proposición 1.3.2. Todo espacio separable con una base punto-numerable, es segundo numerable.

Demostración. Sea X un espacio separable y $\mathcal{B}$ una base punto-numerable de X. Existe un subespacio numerable $D \subseteq X$ tal que $\overline{D} = X$. Basta demostrar que $|\mathcal{B}| \leq \omega$.
Para cada $x \in X$ la familia $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ es numerable. Si $B \in \mathcal{B}$, entonces existe $x \in D$ tal que $B \in \mathcal{B}_x$; de modo que $\mathcal{B} \subseteq \bigcup_{x \in D} \mathcal{B}_x$. Lo anterior muestra que $|\mathcal{B}| \leq |\bigcup_{x \in D} \mathcal{B}_x| \leq \omega$. ■

Teorema 1.3.3. Todo espacio numerablemente compacto con una base punto-numerable, es segundo numerable.

Demostración. Sea X un espacio numerablemente compacto y $\mathcal{B}$ una base punto-numerable de X. Construiremos por recursión una familia $\{D_n : n < \omega\}$ de subconjuntos numerables de X.
Paso 0. Sea $x_0 \in X$ arbitrario y hagamos $D_0 = \{x_0\}$.
Paso n. Dado $n > 0$, supongamos que hemos escogido un subconjunto numerable D_{n-1} de X. Hagamos $\mathcal{B}_n = \{B \in \mathcal{B} : B \cap D_{n-1} \neq \emptyset\}$ y para cada familia $\mathcal{U} \in [\mathcal{B}_n]^{<\omega}$ tal que $X \setminus \bigcup \mathcal{U} \neq \emptyset$, escojamos $x(\mathcal{U}) \in X \setminus \bigcup \mathcal{U}$ arbitrariamente.
Definamos $D_n = D_{n-1} \cup \{x(\mathcal{U}) : \mathcal{U} \in [\mathcal{B}_n]^{<\omega}$ y $X \setminus \bigcup \mathcal{U} \neq \emptyset\}$; es claro que el conjunto D_n es numerable y $D_{n-1} \subseteq D_n$.
Continuando por recursión obtenemos una familia $\{D_n : n < \omega\}$ de subconjuntos numerables de X tal que $D_n \subseteq D_{n+1}$ para cada $n < \omega$.
Por la Proposición 1.3.2 basta demostrar que el conjunto $D = \bigcup_{n<\omega} D_n$ es denso en X. Supongamos que $X \setminus \overline{D} \neq \emptyset$; sean $x \in X \setminus \overline{D}$ y $\mathcal{A} = \{B \in \mathcal{B} : x \notin B$ y $B \cap D \neq \emptyset\}$. La familia $\mathcal{A}$ es numerable y $\overline{D} \subseteq \bigcup \mathcal{A}$. El subespacio $\overline{D}$ es numerablemente compacto y por lo tanto existe $\mathcal{U} \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$ tal que $\overline{D} \subseteq \bigcup \mathcal{U}$.
Como $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}$, el conjunto $B \cap D$ es no vacío para cada $B \in \mathcal{U}$ por lo cual existe un elemento $n(B) \in \omega$, tal que $B \cap D_{n(B)} \neq \emptyset$. Si $k = max\{n(B) : B \in \mathcal{U}\}$, entonces $\mathcal{U} \in [\mathcal{B}_{k+1}]^{<\omega}$. Como $x \notin \bigcup \mathcal{A}$, se sigue que $x \in X \setminus \bigcup \mathcal{U}$. Nuestra construcción para el paso $k+1$ muestra que existe $x(\mathcal{U}) \in X \setminus \bigcup \mathcal{U}$. En consecuencia $x(\mathcal{U}) \notin \bigcup \mathcal{U} \supseteq \overline{D} \supseteq D$, pero $x(\mathcal{U}) \in D_{k+1} \subseteq D$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $\overline{D} = X$. ■

Es claro que si un espacio tiene una base punto-numerable, entonces cada subespacio tambien tiene una base punto-numerable.

Corolario 1.3.4. Todo espacio σ-numerablemente compacto con una base punto-numerable, es segundo numerable.

Demostración. Sea $X = \bigcup_{n<\omega} X_n$ un espacio con una base punto-numerable, donde cada X_n es un subespacio numerablemente compacto. Por el Teorema 1.3.3, cada espacio X_n es separable así que existe un subespacio numerable D_n de X_n tal que $\overline{D_n}^{X_n} = X_n$, donde $\overline{D_n}^{X_n}$ es la cerradura del conjunto D_n en X_n. Notemos que $X = \bigcup_{n<\omega} X_n = \bigcup_{n<\omega} \overline{D_n}^{X_n} = \bigcup_{n<\omega}(\overline{D_n} \cap X_n) \subseteq \bigcup_{n<\omega} \overline{D_n} \subseteq \overline{\bigcup_{n<\omega} D_n}$. Entonces, el subespacio $D = \bigcup_{n<\omega} D_n$ es numerable y denso en X. Por la Proposición 1.3.2, se concluye que X es segundo numerable. ■

Teorema 1.3.5. Todo espacio Lindelöf Σ con una base punto-numerable, es segundo numerable.

Demostración. Sea X un espacio Lindelöf Σ y $\mathcal{B}$ una base punto-numerable de X. Existe una cubierta compacta $\mathcal{C}$ de X y una red numerable $\mathcal{F}$ con respecto a $\mathcal{C}$. Construiremos por recursión una familia $\{D_n : n < \omega\}$ de subconjuntos numerables de X.
Paso 0. Sea $x_0 \in X$ arbitrario y tomemos $D_0 = \{x_0\}$.
Paso n. Supongamos que $n > 0$ y hemos escogido un conjunto numerable $D_{n-1} \subseteq X$. Hagamos $\mathcal{B}_n = \{B \in \mathcal{B} : B \cap D_{n-1} \neq \emptyset\}$. Para cada $F \in \mathcal{F}$ y cada familia $\mathcal{U} \in [\mathcal{B}_n]^{<\omega}$ tal que $F \setminus \bigcup \mathcal{U} \neq \emptyset$, escojamos un punto arbitrario $x(F,\mathcal{U})$ en $F \setminus \bigcup \mathcal{U}$. Definamos $D_n = D_{n-1} \cup \{x(F,\mathcal{U}) : F \in \mathcal{F},\ \mathcal{U} \in [\mathcal{B}_n]^{<\omega}$ y $F \setminus \bigcup \mathcal{U} \neq \emptyset\}$. Es claro que el conjunto D_n es numerable y $D_{n-1} \subseteq D_n$.
Continuando por inducción obtenemos una familia $\{D_n : n < \omega\}$ de subconjuntos numerables de X tal que $D_n \subseteq D_{n+1}$ para cada $n < \omega$.
Por la Proposición 1.3.2 basta demostrar que el conjunto $D = \bigcup_{n<\omega} D_n$ es denso en X. Supongamos que $X \setminus \overline{D} \neq \emptyset$; sean $x \in X \setminus \overline{D}$ y $\mathcal{A} = \{B \in \mathcal{B} : x \notin B$ y $B \cap D \neq \emptyset\}$. Tomemos un conjunto $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C$. La familia $\mathcal{A}$ es numerable y $\overline{D} \subseteq \bigcup \mathcal{A}$. El subespacio $C \cap \overline{D}$ es compacto y por lo tanto existe una familia $\mathcal{U} \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$ tal que $C \cap \overline{D} \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. Entonces $C \subseteq (X \setminus \overline{D}) \cup \bigcup \mathcal{U}$; por consiguiente, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $C \subseteq F \subseteq (X \setminus \overline{D}) \cup \bigcup \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}$, el conjunto $B \cap D$ es no vacío para cada $B \in \mathcal{U}$ por lo cual existe un elemento $n(B) \in \omega$, tal que $B \cap D_{n(B)} \neq \emptyset$. Si $k = max\{n(B) : B \in \mathcal{U}\}$, entonces $\mathcal{U} \in [\mathcal{B}_{k+1}]^{<\omega}$. Como $x \notin \bigcup \mathcal{A}$, se sigue que $x \in F \setminus \bigcup \mathcal{U}$. Nuestra construcción en el paso $k+1$ muestra que existe $x(F,\mathcal{U}) \in F \setminus \bigcup \mathcal{U} \subseteq X \setminus \overline{D}$. En consecuencia $x(F,\mathcal{U}) \in X \setminus \overline{D}$ mientras $x(F,\mathcal{U}) \in D_{k+1} \subseteq D$ lo que es una contradicción. Por lo tanto $\overline{D} = X$. ■

Definición 1.3.6. Un espacio X es llamado ω_1-sucesión convergente si $|X| = \omega_1$ y existe un punto $x \in X$ tal que $|X \setminus U| \leq \omega$ para cada $U \in \tau(x, X)$.
Dado un espacio X, denotaremos a su diagonal por Δ esto es, $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$. Sean $I = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{D} = \{0,1\}$ y $\mathbb{N} = \omega \setminus \{0\}$. Hagamos $\omega^0 = \{\emptyset\}$ y $\omega^{<\omega} = \bigcup\{\omega^n : n \in \omega\}$; para cada $n \in \mathbb{N}$, identificaremos ω^n con el conjunto de todos los mapeos de $n = \{0,1,...,n-1\}$ a ω y si $f \in \omega^n$, entonces $g = f^\frown k \in \omega^{n+1}$ es definido por $g|_n = f$ y $g(n) = k$.

Definición 1.3.7. Un espacio X tiene diagonal pequeña si para cada subconjunto no numerable Y de $X^2 \setminus \Delta$, existe $U \in \tau(\Delta, X^2)$ tal que el subespacio $Y \setminus U$ es no numerable.

Proposición 1.3.8. Sea X un espacio y $F \subseteq X$. Si X tiene diagonal pequeña, entonces el subespacio F también tiene diagonal pequeña.

Demostración. Sean Δ y Δ_F las diagonales de X y F respectivamente. Tomemos un subconjunto no numerable $Y \subseteq F^2 \setminus \Delta_F$. Como Y es un subconjunto no numerable de $X^2 \setminus \Delta$, existe $U \in \tau(\Delta, X^2)$ tal que el subespacio $Y \setminus U$ es no numerable. Si $V = U \cap F^2$, entonces $Y \setminus U \subseteq Y \setminus V$. Por lo tanto, el conjunto $Y \setminus V$ es no numerable y $V \in \tau(\Delta_F, F^2)$. Lo anterior demuestra que F tiene diagonal pequeña. ■

Proposición 1.3.9. Si un espacio X tiene diagonal pequeña, entonces X no contiene ω_1-sucesiones convergentes.

Demostración. Sea Y un subconjunto de X de cardinalidad ω_1 para el cual existe $y \in Y$ tal que $|Y \backslash U| \leq \omega$ para cada $U \in \tau(y, Y)$, y por tanto, para cada $U \in \tau(y, X)$. El conjunto $A = \{(t, y) : t \in Y \backslash \{y\}\}$ está contenido en $X^2 \backslash \Delta$ y $|A| = \omega_1$. Dado un conjunto arbitrario $U \in \tau(\Delta, X^2)$, tenemos que $(y, y) \in U$ por lo que existe $O_U \in \tau(y, X)$ tal que $O_U \times O_U \subseteq U$. El conjunto $Y \backslash O_U$ es numerable; en consecuencia, $A \backslash U \subseteq A \backslash (O_U \times O_U) \subseteq (Y \backslash O_U) \times \{y\}$ lo que implica que $A \backslash U$ es numerable. Puesto que $U \in \tau(\Delta, X^2)$ se tomó de manera arbitraria, se concluye que X no es un espacio con diagonal pequeña. ■

Es un teorema clásico que cada compacto metrizable es una imagen continua de $\mathbb{D}^\omega$ [Wi, Theorem 30.7]. Sin embargo aquí sólo vamos a necesitar la siguiente versión de este resultado.

Teorema 1.3.10. El espacio $I = [0, 1]$ es una imagen continua de $\mathbb{D}^\omega$.

Demostración. Construiremos por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$ un intervalo cerrado $I_f \subseteq I$ de diámetro $\frac{1}{2^n}$ para cada $f \in \mathbb{D}^n$.
Sean $I_{\{(0,0)\}} = [0, \frac{1}{2}]$ y $I_{\{(0,1)\}} = [\frac{1}{2}, 1]$. Supongamos que $n \in \mathbb{N}$ y para cada mapeo $f \in \mathbb{D}^n$ tenemos definido un intervalo cerrado $I_f \subseteq I$ tal que $diam(I_f) = \frac{1}{2^n}$. Para cada $f \in \mathbb{D}^n$, si $I_f = [a, b]$, hagamos $I_{f^\frown 0} = [a, c]$ e $I_{f^\frown 1} = [c, b]$ donde $c = \frac{a+b}{2}$. Luego hemos definido un intervalo cerrado $I_g \subseteq I$ tal que $diam(I_g) = \frac{1}{2^{n+1}}$ para cada $g \in \mathbb{D}^{n+1}$.
Dado cualquier $x \in \mathbb{D}^\omega$, obsérvese que la familia $\{I_{x|_n} : n \in \mathbb{N}\}$ consiste de compactos y es decreciente; entonces $\bigcap\{I_{x|_n} : n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$, y como los diametros de los intervalos $I_{x|_n}$ tienden a cero, existe un único $\varphi(x) \in \bigcap\{I_{x|_n} : n \in \mathbb{N}\}$. Veamos que el mapeo $\varphi : \mathbb{D}^\omega \to I$ es sobreyectivo.
Sea $t \in I$. Construiremos por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$ una familia de mapeos $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se satisfagan las siguientes condiciones:
(i) $f_n \in \mathbb{D}^n$ y $t \in I_{f_n}$;
(ii) $f_n \subseteq f_{n+1}$.
Existe $f_1 \in \mathbb{D}^1$ tal que $t \in I_{f_1}$. Supongamos que tenemos $f_n \in \mathbb{D}^n$ para algún $n \geq 1$ tal que $t \in I_{f_n}$. De la igualdad $I_{f_n} = I_{f_n{}^\frown 0} \cup I_{f_n{}^\frown 1}$ se sigue que existe $k \in \mathbb{D}$ tal que $t \in I_{f_n{}^\frown k}$; hagamos $f_{n+1} = f_n{}^\frown k$. Entonces $f_{n+1} \in \mathbb{D}^{n+1}$ y $t \in I_{f_{n+1}}$, mientras $f_n \subseteq f_{n+1}$.
Si $x = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, entonces $t \in \bigcap\{I_{f_n} : n \in \mathbb{N}\} = \bigcap\{I_{x|_n} : n \in \mathbb{N}\} = \{\varphi(x)\}$. Lo anterior demuestra que φ es sobreyectiva.
Para demostrar que φ es continua tomemos cualesquiera $x \in \mathbb{D}^\omega$ y $\varepsilon > 0$. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Si $W = \{y \in \mathbb{D}^\omega : y|_n = x|_n\}$, entonces $W \in \tau(x, \mathbb{D}^\omega)$. Si $y \in W$, entonces $\varphi(y) \in I_{y|_n} = I_{x|_n} \ni \varphi(x)$ y por consiguiente $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq diam(I_{x|_n}) = \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Por lo tanto, φ es continua. ■

Corolario 1.3.11. Si κ es un cardinal infinito, entonces el espacio I^κ es una imagen continua de $\mathbb{D}^\kappa$.

Demostración. Apliquemos el Teorema 1.3.10 para encontrar un mapeo continuo y sobreyectivo $f : \mathbb{D}^\omega \to I$. Para cada ordinal $\alpha < \kappa$, hagamos $\varphi_\alpha = f$; entonces, el mapeo $\varphi = \prod_{\alpha<\kappa} \varphi_\alpha : (\mathbb{D}^\omega)^\kappa \to I^\kappa$ es continuo y sobreyectivo [Tk7, Fact 1, S.271]. El espacio $(\mathbb{D}^\omega)^\kappa$ es homeomorfo a $\mathbb{D}^\kappa$ y por lo tanto, I^κ es una imagen continua de $\mathbb{D}^\kappa$. ■

Proposición 1.3.12. Si κ un cardinal infinito, entonces cada subespacio de $\mathbb{D}^\kappa$ es cerodimensional, esto es, tiene una base que consiste de subconjuntos abierto-cerrados.

Demostración. Dado cualquier subespacio $Y \subseteq \mathbb{D}^\kappa$, si $\mathcal{B}$ es una base en $\mathbb{D}^\kappa$, entonces $\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ es una base en Y. Es claro que si todos los elementos de $\mathcal{B}$ son abierto-cerrados en $\mathbb{D}^\kappa$, entonces, todos los elementos de $\mathcal{B}_Y$ son abierto-cerrados en Y. Por lo tanto, basta demostrar que $\mathbb{D}^\kappa$ tiene una base cuyos elementos son abierto-cerrados. Dados $\alpha < \kappa$ e $i \in \mathbb{D}$, sea $O^i_\alpha = \{x \in \mathbb{D}^\kappa : x(\alpha) = i\}$.
Es evidente que la familia $\mathcal{S} = \{O^i_\alpha : \alpha < \kappa \text{ y } i \in \mathbb{D}\}$ es una subbase de $\mathbb{D}^\kappa$. Cada $O^i_\alpha \in \mathcal{S}$ es abierto-cerrado en $\mathcal{D}^\kappa$, pues es la imagen inversa del conjunto abierto-cerrado $\{i\}$ bajo la proyección natural de $\mathbb{D}^\kappa$ sobre el α-ésimo factor. Puesto que la intersección finita de subconjuntos abierto-cerrados es abierto-cerrada, la familia $\bigwedge \mathcal{S}$ es una base de $\mathbb{D}^\kappa$ que consiste de subconjuntos abierto-cerrados. ■

Definición 1.3.13. Dado un espacio X, diremos que una familia $\mathcal{F} = \{F^0_t, F^1_t : t \in T\}$ de subconjuntos cerrados de X, es diádica si $F^0_t \cap F^1_t = \emptyset$ para cada $t \in T$ y el conjunto $I(\mathcal{F}, h) = \bigcap\{F^{h(t)}_t : t \in dom(h)\}$ es no vacío para cada $h \in H(T) = \bigcup\{\mathbb{D}^A : A \in [T]^{<\omega}\}$.

Teorema 1.3.14. Si κ es un cardinal infinito y X un espacio compacto, entonces las siguiente condiciones son equivalentes:
(a) el espacio I^κ es una imagen continua de X;
(b) existe un subconjunto cerrado $F \subseteq X$, tal que $\mathbb{D}^\kappa$ es una imagen continua de F;
(c) Existe una familia diádica $\mathcal{F} = \{F^0_\alpha, F^1_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq exp(X)$ de cardinalidad κ.

Demostración. (a)⇒(b) Sea $g : X \to I^\kappa$ una función continua y sobreyectiva. El subespacio $\mathbb{D}^\kappa \subseteq I^\kappa$ es compacto y por tanto cerrado. Entonces, el subconjunto $F = g^{-1}(\mathbb{D}^\kappa)$ es cerrado en X y $f = g|_F : F \to \mathbb{D}^\kappa$ es un mapeo continuo y sobreyectivo.

(b)⇒(c) Sea $f : F \to \mathbb{D}^\kappa$ una función continua y sobreyectiva. Para cada $i \in \mathbb{D}$ y $\alpha < \kappa$, sean $G^i_\alpha = \{x \in \mathbb{D}^\kappa : x(\alpha) = i\}$ y $F^i_\alpha = f^{-1}(G^i_\alpha)$. Basta demostrar que la familia $\{F^0_\alpha, F^1_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es diádica.
Para cada $\alpha < \kappa$, el conjunto $G^0_\alpha \cap G^1_\alpha$ es vacío así que el conjunto $F^0_\alpha \cap F^1_\alpha$ es también vacío. Dado cualquier $\varphi \in H(\kappa)$, demostraremos que $\bigcap\{F^{\varphi(\alpha)}_\alpha : \alpha \in dom(\varphi)\} \neq \emptyset$. Para cada $\alpha < \kappa$ definamos $x(\alpha) = \varphi(\alpha)$ si $\alpha \in dom(\varphi)$ y $x(\alpha) = 0$ si $\alpha \notin dom(\varphi)$. Entonces, el punto x pertenece a $\bigcap\{G^{\varphi(\alpha)}_\alpha : \alpha \in dom(\varphi)\}$. Puesto que el mapeo f es sobreyectivo, el conjunto $\bigcap\{F^{\varphi(\alpha)}_\alpha : \alpha \in dom(\varphi)\} = f^{-1}(\bigcap\{G^{\varphi(\alpha)}_\alpha : \alpha \in dom(\varphi)\})$ es no vacío.

(c)⇒(b) Es claro que el conjunto $F = \bigcap\{F^0_\alpha \cup F^1_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es cerrado en X. Para cada $i \in \mathbb{D}$ y $\alpha < \kappa$, sea $V^i_\alpha = F^i_\alpha \cap F$; puesto que $V^0_\alpha \cap V^1_\alpha = \emptyset$ y $F = V^0_\alpha \cup V^1_\alpha$, los subconjuntos V^0_α y V^1_α son abierto-cerrados en F.
Dado un punto $x \in \mathbb{D}^\kappa$, si $A \in [\kappa]^{<\omega}$, entonces $x|_A \in H(\kappa)$, y en consecuencia el subconjunto $F_{x|_A} = \bigcap\{F^{x(\alpha)}_\alpha : \alpha \in A\}$ es no vacío. Si $A, B \in [\kappa]^{<\omega}$, es claro que $F_{x|_{A\cup B}} \subseteq F_{x|_A} \cap F_{x|_B}$; por lo tanto, la familia $\{F_{x|_A} : A \in [\kappa]^{<\omega}\}$ es centrada. Puesto que los elementos de la familia $\{F_{x|_A} : A \in [\kappa]^{<\omega}\}$ son compactos y no vacíos, el subconjunto $Q_x = \bigcap\{F_{x|_A} : A \in [\kappa]^{<\omega}\}$ es no vacío.

Afirmación 1. Si $x, y \in \mathbb{D}^\kappa$ y $x \neq y$, entonces Q_x y Q_y son disjuntos.

Existe un ordinal $\alpha < \kappa$ tal que $x(\alpha) \neq y(\alpha)$. Para el conjunto $A = \{\alpha\}$ tenemos que $Q_x \subseteq F_{x|_A} = F^{x(\alpha)}_\alpha$ y $Q_y \subseteq F_{y|_A} = F^{y(\alpha)}_\alpha$. Los conjuntos $F^{x(\alpha)}_\alpha$ y $F^{y(\alpha)}_\alpha$ son disjuntos y por lo tanto, Q_x y Q_y también lo son. □

Afirmación 2. $F = \bigcup\{Q_x : x \in \mathbb{D}^\kappa\}$.
Si $z \in F$, entonces para cada $\alpha < \kappa$ existe $x(\alpha) \in \mathbb{D}$ tal que $z \in F^{x(\alpha)}_\alpha$; esto define un punto

$x \in \mathbb{D}^\kappa$ y demuestra que $z \in \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha^{x(\alpha)} = F_{x|_A}$ para cada $A \in [\kappa]^{<\omega}$, es decir $z \in Q_x$. Por lo tanto, $F \subseteq \bigcup\{Q_x : x \in \mathbb{D}^\kappa\}$. La contención $\bigcup\{Q_x : x \in \mathbb{D}^\kappa\} \subseteq F$ es inmediata. $\square$

Si $z \in F$, por la Afirmación 1 y Afirmación 2, existe un único $x \in \mathbb{D}^\kappa$ tal que $z \in Q_x$; definamos $\varphi(z) = x$. Se sigue de la Afirmación 2 que el mapeo $\varphi : F \to \mathbb{D}^\kappa$ es sobreyectivo. Resta ver que φ es continuo. Sean $z \in F$ y $U \in \tau(\varphi(z), \mathbb{D}^\kappa)$. Existe $A \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $x = \varphi(z) \in W = \{y \in \mathbb{D}^\kappa : y|_A = x|_A\} \subseteq U$; es evidente que $W \in \tau(x, \mathbb{D}^\kappa)$. El conjunto $G = \bigcap\{V_\alpha^{x(\alpha)} : \alpha \in A\}$ es abierto-cerrado en F. Puesto que $z \in F$ y $z \in Q_x \subseteq \{F_\alpha^{x(\alpha)} : \alpha \in A\}$, tenemos que $z \in \bigcap\{F \cap F_\alpha^{x(\alpha)} : \alpha \in A\} = G$. Basta demostrar que $\varphi(G) \subseteq W$.
Tomemos cualquier punto $z' \in G$; como $z' \in F_{x|_A} = \bigcap\{F_\alpha^{x(\alpha)} : \alpha \in A\}$, si $z' \in Q_y$ entonces, $z' \in F_{y|_A}$, por lo que $x|_A = y|_A$. Por lo tanto, $y \in W$, lo que imlica que $\varphi(z') \in W$. Por consiguiente, $\varphi(G) \subseteq W$.

(b)⇒(a) Por el Corolario 1.3.11 existe un mapeo continuo y sobreyectivo $\varphi : \mathbb{D}^\kappa \to I^\kappa$. Sea $f : F \to \mathbb{D}^\kappa$ un mapeo continuo y sobreyectivo. Para cada $\alpha < \kappa$ sea $p_\alpha : I^\kappa \to I$ la proyección natural. Como $f_\alpha = p_\alpha \circ \varphi \circ f : F \to I$ es continuo, por el teorema de extensión de Tietze-Urysohn, existe un mapeo continuo $g_\alpha : X \to I$ tal que $g_\alpha|_F = f_\alpha$. Entonces $g = \triangle\{g_\alpha : \alpha < \kappa\} : X \to I^\kappa$ es continuo y puesto que $I^\kappa = \varphi(f(F)) \subseteq g(X)$, también es sobreyectivo. ■

Definición 1.3.15. Sea X un espacio; diremos que una familia $\mathcal{B} \subseteq \tau^*(X)$ es una π-base en $x \in X$, si para cada $U \in \tau(x, X)$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq U$. Definimos el π-caracter de X en x como $\pi\chi(x, X) = min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ es una π-base en $x\}$.

Teorema 1.3.16. Si X es un espacio compacto tal que $\pi\chi(x, X) \geq \omega_1$ para cada $x \in X$, entonces existe un subconjunto cerrado $F \subseteq X$ tal que $\mathbb{D}^{\omega_1}$ es una imagen continua de F.

Demostración. Dado un subconjunto A de X, una familia $\mathcal{B} \subseteq \tau(X)$ es base externa de A en X, si para cada $U \in \tau(A, X)$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $A \subseteq B \subseteq U$.
Denotemos por $\mathcal{C}$ a la familia de todos los subconjuntos cerrados G_δ no vacíos de X. Cada $C \in \mathcal{C}$ tiene una base externa numerable $\mathcal{B}_C$ en X [Tk7, Problem 327].

Afirmación 1. Para cada $x \in X$ y cualquier $\mathcal{C}' \in [\mathcal{C}]^{\leq\omega}$, existe $W \in \tau(x, X)$ tal que $C \setminus W \neq \emptyset$ para cada $C \in \mathcal{C}'$.

Sean $x \in X$ y $\mathcal{C}' \in [\mathcal{C}]^{\leq\omega}$. Supongamos que para cada $U \in \tau(x, X)$ existe $C_U \in \mathcal{C}'$ tal que $C_U \subseteq U$; entonces existe $B_U \in \mathcal{B}_{C_U}$ tal que $C_U \subseteq B_U \subseteq U$. Lo anterior demuestra que $\bigcup\{\mathcal{B}_C : C \in \mathcal{C}'\}$ es una π-base numerable en x, lo que es una contradicción. $\square$

Afirmación 2. Para cada $\mathcal{C}' \in [\mathcal{C}]^{\leq\omega}$ existen $F, G \in \mathcal{C}$ tales que $F \cap C \neq \emptyset$ y $G \cap C \neq \emptyset$ para todo $C \in \mathcal{C}'$, mientras $F \cap G \cap B = \emptyset$, para algún $B \in \mathcal{C}'$.

Apliquemos la Afirmación 1 a cada $x \in X$ para obtener un conjunto $W_x \in \tau(x, X)$ tal que $C \setminus W_x \neq \emptyset$ para todo $C \in \mathcal{C}'$. Puesto que en un espacio de Tychonoff cada abierto contiene un abierto cocero y por tanto F_σ, podemos suponer que W_x es un abierto F_σ para cada $x \in X$. Por la compacidad de X existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que $W_{x_1} \cup \ldots \cup W_{x_n} = X$. Para cada $i \leq n$ sea $P_{x_i} = X \setminus W_{x_i}$; entonces P_{x_i} es un cerrado G_δ y $P_{x_1} \cap \ldots \cap P_{x_n} = \emptyset$. Sea $r \leq n$ el mínimo numero para el cual existen r elementos en la familia $\{P_{x_1}, \ldots, P_{x_n}\}$ cuya intersección no interseca a algún elemento de $\mathcal{C}'$. Puesto que para cada $i \leq n$ y cada $C \in \mathcal{C}'$ el conjunto $P_{x_i} \cap C = (X \setminus W_{x_i}) \cap C = C \setminus W_{x_i}$ es no vacío, tenemos que $r > 1$. Por consiguiente existen $Q_1, \ldots, Q_r \in \{P_{x_1}, \ldots, P_{x_n}\}$ tales que $(Q_1 \cap \ldots \cap Q_r) \cap B = \emptyset$ para algún $B \in \mathcal{C}'$; haciendo $F = Q_1$ y $G = Q_2 \cap \ldots \cap Q_r$ vemos que F y G son los conjuntos prometidos. $\square$

Por el Teorema 1.3.14 basta demostrar que existe una familia diádica $\mathcal{G}$ en X de cardinalidad ω_1. Construiremos por inducción una familia $\mathcal{C}_{\omega_1} = \{C_\alpha^0, C_\alpha^1 : \alpha < \omega_1\} \subseteq \mathcal{C}$ tal que los

conjuntos C_α^0 y C_α^1 son disjuntos para cada $\alpha < \omega_1$.
Tomemos conjuntos disjuntos $C_0^0, C_0^1 \in \mathcal{C}$ arbitrariamente.
Supongamos que $\beta < \omega_1$ y tenemos $\mathcal{C}_\beta = \{C_\alpha^0, C_\alpha^1 : \alpha < \beta\} \subseteq \mathcal{C}$ tal que $C_\alpha^0 \cap C_\alpha^1 = \emptyset$ para cada $\alpha < \beta$. Apliquemos la Afirmación 2 a la familia $\mathcal{H}_\beta = \bigwedge \mathcal{C}_\beta$ para obtener $K_\beta^0, K_\beta^1 \in \mathcal{C}$ tales que $K_\beta^0 \cap H \neq \emptyset \neq K_\beta^1 \cap H$ para cada $H \in \mathcal{H}_\beta$, mientras existe $H' \in \mathcal{H}_\beta$ tal que $K_\beta^0 \cap K_\beta^1 \cap H' = \emptyset$. Es claro que podemos encontrar $g_\beta \in H(\beta)$ tal que $H' = I(\mathcal{C}_\beta, g_\beta)$. Si $C_\beta^0 = K_\beta^0 \cap I(\mathcal{C}_\beta, g_\beta)$ y $C_\beta^1 = K_\beta^1 \cap I(\mathcal{C}_\beta, g_\beta)$, entonces $C_\beta^0 \cap C_\beta^1 = \emptyset$. Por inducción obtenemos a la familia $\mathcal{C}_{\omega_1}$.

Para cada $\alpha \in \omega_1 \backslash \{0\}$ tomemos que $\varphi(\alpha) = max(dom(g_\alpha)) < \alpha$. Por el Lema de Fodor (Pressing Down Lemma) existen $E \subseteq \omega_1 \backslash \{0\}$ y $\beta < \omega_1$ tales que $|E| = \omega_1$ y $\varphi(E) = \{\beta\}$. Es claro que $H(\beta+1)$ es numerable y $g_\alpha \in H(\beta+1)$ para todo $\alpha \in E$. Puesto que $|E| = \omega_1$, existen $E' \subseteq E$ y $g \in H(\beta+1)$ tales que $|E'| = \omega_1$ y $g_\alpha = g$ si $\alpha \in E'$. Por consiguiente $C_\alpha^i = I(\mathcal{C}_{\omega_1}, g) \cap K_\alpha^i$ para todo $\alpha \in E'$ e $i \in \mathbb{D}$. Es claro que $E'' = E' \backslash max(dom(g))$ tiene cardinalidad ω_1.
Fijémonos en la familia $\mathcal{G} = \{C_\alpha^0, C_\alpha^1 : \alpha \in E''\} \subseteq \mathcal{C}$. Para ver que $\mathcal{G}$ es diádica, basta demostrar que $I(\mathcal{C}_{\omega_1}, g') \neq \emptyset$ para cada $g' \in H(E'')$. Tenemos que

$$I(\mathcal{C}_{\omega_1}, g') = \bigcap\{C_\alpha^{g'(\alpha)} : \alpha \in dom(g')\} = I(\mathcal{C}_{\omega_1}, g) \cap \bigcap\{K_\alpha^{g'(\alpha)} : \alpha \in dom(g')\}.$$

De la definición de E'' es claro que $max(dom(g)) < \alpha$ para cada $\alpha \in E''$; podemos considerar que $dom(g) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ con $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$. El conjunto $I(\mathcal{C}_{\omega_1}, g) \cap K_{\alpha_1}^{g'(\alpha_1)}$ es no vacío puesto que $I(\mathcal{C}_{\omega_1}, g) \in \bigwedge\{C_\alpha^0, C_\alpha^1 : \alpha < \alpha_1\} = \mathcal{H}_{\alpha_1}$.
Análogamente, el conjunto $I(\mathcal{C}_{\omega_1}, g) \cap K_{\alpha_1}^{g'(\alpha_1)} \cap K_{\alpha_1}^{g'(\alpha_2)} = C_{\alpha_1}^{g'(\alpha_1)} \cap K_{\alpha_1}^{g'(\alpha_2)}$ es no vacío puesto que $C_{\alpha_1}^{g'(\alpha_1)} \in \bigwedge\{C_\alpha^0, C_\alpha^1 : \alpha < \alpha_2\} = \mathcal{H}_{\alpha_2}$. Así, sucesivamente encontramos que $I(\mathcal{C}_{\omega_1}, g') = C_{\alpha_1}^{g'(\alpha_1)} \cap \ldots \cap C_{\alpha_{n-1}}^{g'(\alpha_{n-1})} \cap K_{\alpha_n}^{g'(\alpha_n)} \neq \emptyset$. Finalmente, la familia $\mathcal{G}$ es como se prometió. ■

Proposición 1.3.17. Sea $\{M_t : t \in T\}$ una familia de espacios segundo numerable. Si $M = \prod_{t \in T} M_t$, entonces para todo abierto U en M, existe $S \in [T]^{\leq \omega}$ tal que $p_S^{-1}(p_S(\overline{U})) = \overline{U}$, donde $p_S : M \to M_S = \prod_{t \in S} M_S$ es la proyección natural.

Demostración. Los conjuntos U y $V = M \backslash \overline{U}$ son abiertos y disjuntos. Existe un conjunto numerable $S \subseteq T$ tal que $p_S(U)$ y $p_S(V)$ son separados en M_S, esto es, los conjuntos $p_S(U) \cap \overline{p_S(V)}^{M_S}$ y $\overline{p_S(U)}^{M_S} \cap p_S(V)$ son vacíos [Tk7, Fact 3, S.291]. Por la continuidad de p_S, tenemos que $p_S(\overline{U}) \subseteq \overline{p_S(U)}^{M_S}$ y por tanto $p_S(\overline{U}) \cap p_S(M \backslash \overline{U}) = \emptyset$. Lo anterior implica que $p_S^{-1}(p_S(\overline{U})) = \overline{U}$. ■

Teorema 1.3.18. Sea X un espacio compacto tal que $\mathbb{D}^{\omega_1}$ es una imagen continua de X. Entonces X contiene una ω_1-sucesión convergente.

Demostración. Dado un mapeo sobreyectivo $g : Z \to Y$, diremos que g es irreducible si $g(F) \neq Y$ para cada conjunto cerrado $F \subseteq Z$ tal que $F \neq Z$.

Afirmación. Si $g : Z \to Y$ es un mapeo perfecto, entonces existe un subconjunto cerrado $F \subseteq Z$ tal que $f(F) = Y$ y $g|_F$ es irreducible.

Sea $\mathcal{A} = \{F \subset Z : F \neq Z$ es cerrado y $g(F) = Y\}$. Si $\mathcal{A} = \emptyset$, entonces g es irreducible. Definamos un orden $\leq$ en $\mathcal{A}$ dado por $L \leq F$ si y sólo si $F \subseteq L$. Fijémonos en cualquier cadena no vacía $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ y sea $F = \bigcap \mathcal{C}$. Dado $y \in Y$, el conjunto $g^{-1}(y) \cap L$ es no vacío puesto que $g(L) = Y$ para cada $L \in \mathcal{C}$. Como $g^{-1}(y)$ es compacto y $\mathcal{C}$ es una familia centrada de cerrados no vacíos, tenemos que $F \cap g^{-1}(y) = \bigcap\{g^{-1}(y) \cap L : L \in \mathcal{C}\} \neq \emptyset$. Por tanto $y \in g(F)$, y en consecuencia $g(F) = Y$. Lo anterior demuestra que $F \in \mathcal{A}$, así que $\mathcal{F}$ es cota superior

de $\mathcal{C}$ con el orden $\leq$.
Por el lema de Zorn existe un elemento maximal $F \in \mathcal{A}$. Finalmente, $F \subseteq Z$ es cerrado y $g|_F$ es irreducible. $\square$

Sea $f : X \to \mathbb{D}^{\omega_1}$ un mapeo continuo y sobreyectivo. Por la Afirmación existe un subconjunto cerrado $Y \subseteq X$ tal que $f(Y) = \mathbb{D}^{\omega_1}$ y $f|_Y$ es irreducible. Puesto que cualquier ω_1-sucesión convergente en Y es también una ω_1-sucesión convergente en X, podemos asumir sin pérdida de generalidad que $Y = X$, esto es, que el mapeo f es irreducible. Supongamos que el espacio X es cerodimensional, es decir, tiene una base que consta de conjuntos abierto-cerrados. Denotemos por $\mathcal{C}$ a la familia de todos los subconjuntos no vacíos y abierto-cerrados de X. Para cualquier abierto no vacío $U \subseteq X$ necesitaremos a los conjuntos $f^{\#}(U) = \mathbb{D}^{\omega_1} \backslash f(X \backslash U)$ y $U^* = f^{-1}(f^{\#}(U))$. Es claro que $f^{\#}(U) \subseteq f(U)$, $U^* \subseteq U$, $f^{\#}(U) \in \tau(\mathbb{D}^{\omega_1})$ y $U^* \in \tau(X)$. Además, el conjunto U^* es denso en U y por tanto $f^{\#}(U)$ es denso en $f(U)$ [Tk7, Fact 1, S.383]. Una consecuencia inmediata es que:

(1) $Int(f(U))$ es denso en $f(U)$ para cada $U \in \mathcal{C}$,

puesto que $f^{\#}(U) \subseteq Int(f(U))$, donde $Int(f(U))$ es el interior de $f(U)$. Otra propiedad importante es la siguiente:

(2) $Int(f(U \cap V))$ =Int$(f(U)) \cap Int(f(V))$ para cada $U, V \in \mathcal{C}$.

Para probar (2) observemos que la inclusión $Int(f(U \cap V)) \subseteq Int(f(U)) \cap Int(f(V))$ es inmediata. Asumamos que $W = (Int(f(U)) \cap Int(f(V))) \backslash f(U \cap V) \neq \emptyset$. Puesto que W es un subconjunto abierto no vacío de $f(U)$ y $f^{\#}(U)$ es denso en $f(U)$, el conjunto $W_1 = f^{\#}(U) \cap W$ es no vacío, abierto y está contenido en $f(V)$. Puesto que el conjunto $f^{\#}(V)$ es denso en $f(V)$, se tiene que $W_2 = f^{\#}(V) \cap W_1 \in \tau^*(\mathbb{D}^{\omega_1})$ y por tanto $f^{-1}(W_2) \subseteq f^{-1}(f^{\#}(U) \cap f^{\#}(V)) = U^* \cap V^* \subseteq U \cap V$. Por consiguiente, $W_2 \subseteq f(U \cap V)$ lo que contradice que $W_2 \subseteq W$ y $W \cap f(U \cap V) = \emptyset$. Esta contradicción demuestra (2).
Sea $u \in \mathbb{D}^{\omega_1}$ definida por $u(\alpha) = 0$ para cada $\alpha < \omega_1$; además, para cada $\alpha, \beta < \omega_1$, hagamos $u_\alpha(\beta) = 0$ si $\alpha \neq \beta$ y $u_\alpha(\alpha) = 1$. El espacio $K = \{u\} \cup \{u_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq \mathbb{D}^{\omega_1}$ tiene un único punto no aislado u y $K \backslash O$ es finito para cada $O \in \tau(u, \mathbb{D}^{\omega_1})$. Tomemos cualquier $x \in f^{-1}(u)$ y sea $F_\alpha = f^{-1}(u_\alpha)$ para todo $\alpha < \omega_1$.
Para cualquier $\alpha < \omega_1$ denotemos por $p_\alpha : \mathbb{D}^{\omega} \to \mathbb{D}^{\alpha}$, la proyección natural de $\mathbb{D}^{\omega_1}$ en $\mathbb{D}^{\alpha}$, y en general, si $S \subseteq \omega_1$, entonces $p_S : \mathbb{D}^{\omega_1} \to \mathbb{D}^{S}$ es la proyección natural de $\mathbb{D}^{\omega_1}$ en $\mathbb{D}^{S}$. Observemos que si un conjunto $E \subseteq \mathbb{D}^{\omega_1}$ depende de un conjunto $S \subseteq \omega_1$, esto es, $E = p_S^{-1}(E))$, entonces E depende de S' para cualquier $S' \supseteq S$. Se sigue de (1) y la Proposición 1.3.17 que para cada $U \in \mathcal{C}$, el conjunto $f(U)$ depende de algún subconjunto numerable $S \subseteq \omega_1$ y por tanto

(3) para cada $U \in \mathcal{C}$ existe $\alpha < \omega_1$ tal que $f(U)$ depende de las primeras α coordenadas.

Denotemos por $\mathcal{C}(x)$ a la familia $\{U \in \mathcal{C} : x \in U\}$ y sea $\mathcal{C}_\alpha = \{U \in \mathcal{C} : x \in U$ y $f(U)$ depende en las primeras α coordenadas$\}$. Ya hemos demostrado que $\mathcal{C}(x) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{C}_\alpha$. Una consecuencia inmediata de (3) es que si $t \in \mathbb{D}^{\omega_1}$, $U \in \mathcal{C}_\alpha$ y $p_\alpha(t) \in p_\alpha(f(U))$, entonces $t \in f(U)$. En particular,

(4) si $U \in \mathcal{C}_\alpha$, entonces $u_\beta \in f(U)$ para cada $\beta \geq \alpha$,

puesto que $u = f(x) \in f(U)$ y $p_\alpha(u) = p_\alpha(u_\beta)$. Afirmamos que

(5) si $U, V \in \mathcal{C}_\alpha$, entonces $W = U \cap V \in \mathcal{C}_\alpha$.

Para demostrar la afirmación (5), hagamos $U' = Int(f(U))$ y notemos que la igualdad $f(U) = p_\alpha^{-1}(p_\alpha(f(U)))$ implica que $p_\alpha^{-1}(p_\alpha(U')) = U'$, y $V' = Int(f(V))$ implica que $p_\alpha^{-1}(p_\alpha(V')) = V'$. Sea $W' = Int(f(W))$ y apliquemos (2) para concluir que $W' = U' \cap V'$ y por tanto $p_\alpha^{-1}(p_\alpha(W')) = W'$. Finalmente, W' es denso en $f(W)$ y puesto que p_α es un mapeo abierto, concluimos que

$$p_\alpha^{-1}(p_\alpha(f(W))) \subseteq p_\alpha^{-1}(\overline{p_\alpha(W')}) = \overline{p_\alpha^{-1}(p_\alpha(W'))} = \overline{W'} = f(W)$$

lo que prueba que $p_\alpha^{-1}(p_\alpha(f(W))) = f(W)$ y por tanto concluye la demostración de (5). Observemos también que $\mathcal{C}_\alpha \subseteq \mathcal{C}_\beta$ si $\alpha \leq \beta$ y por tanto

(6) $\bigcap \mathcal{C}_\beta \subseteq \bigcap \mathcal{C}_\alpha$ siempre que $\alpha \leq \beta < \omega_1$.

Dado cualquier $\alpha < \omega_1$ se sigue de (4) que $U \cap F_\alpha \neq \emptyset$ para cada $U \in \mathcal{C}_\alpha$; además, la familia $\{U \cap F_\alpha : U \in \mathcal{C}_\alpha\}$ es centrada por (5), lo que muestra que existe $x_\alpha \in F_\alpha \cap (\bigcap \mathcal{C}_\alpha)$ puesto que F_α es compacto.
Afirmamos que $Z = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\} \cup \{x\}$ es una ω_1-sucesión convergente. En primer lugar, $|Z| = \omega_1$ puesto que el mapeo $f|_Z$ condensa Z sobre K. Además, para cada $U \in \tau(x, X)$, existen $\alpha < \omega_1$ y $V \in \mathcal{C}_\alpha$ tales que $x \in V \subseteq U$. Dado cualquier $\beta \geq \alpha$, tenemos que $x_\beta \in \bigcap \mathcal{C}_\beta \subseteq \bigcap \mathcal{C}_\alpha \subseteq V$ y por tanto $|Z \backslash U| \leq |Z \backslash V| \leq |\{x_\beta : \beta < \alpha\}| \leq \omega$. De modo que hemos demostrado que existe una ω_1-sucesión convergente Z en X tal que $f|_Z$ condensa Z sobre el espacio compacto $K \subseteq \mathbb{D}^{\omega_1}$.
Para finalizar la demostración de este Teorema, ahora supongamos que X es un espacio compacto arbitrario; si $w(X) = \kappa$, entonces podemos asumir que $X \subseteq [0,1]^\kappa$. Por el Corolario 1.3.11, existe un mapeo continuo y sobreyectivo $\varphi : \mathbb{D}^\kappa \to [0,1]^\kappa$. Entonces $Y = \varphi^{-1}(X)$ es un espacio compacto cerodimensional por la Proposición 1.3.12; además el mapeo $\varphi_1 = \varphi|_Y$ mapea a Y continuamente y de manera sobreyectiva en X. Luego, $f \circ \varphi_1$ mapea a Y continuamente y de manera sobreyectiva en $\mathbb{D}^{\omega_1}$ por lo que podemos aplicar lo que hemos demostrado para espacios compactos cero dimensionales para concluir que existe una ω_1-sucesión convergente $Z_1 \subseteq Y$ tal que $f \circ \varphi$ condensa Z_1 sobre K. Puesto $\varphi|_{Z_1} : Z_1 \to Z = \varphi(Z_1)$ es una biyección, tenemos que $|Z| = |Z_1| = \omega_1$ y por tanto el espacio Z también es una ω_1-sucesión convergente en X. ■

Definición 1.3.19. Sea X un espacio y κ un cardinal infinito; diremos que un conjunto $F = \{x_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq X$ es una sucesión libre de longitud κ si para cada $\beta < \kappa$ el conjunto $\overline{\{x_\alpha : \alpha < \beta\}} \cap \overline{\{x_\alpha : \alpha \geq \beta\}}$ es vacío.

Definimos la estrechez $t(X)$ de un espacio topológico X como el mínimo cardinal infinito κ tal que $\overline{A} = \bigcup\{\overline{B} : B \in [A]^{\leq\kappa}\}$ para cada $A \subseteq X$. Es claro que todo espacio de Fréchet-Urysohn y en particular todo espacio metrizable, tiene estrechez numerable.

Teorema 1.3.20. Sea κ un cardinal infinito y X un espacio compacto. Supongamos que $S = \{x_\alpha : \alpha < \kappa^+\} \subseteq X$ es una sucesión libre de longitud κ^+. Entonces el ordinal $\kappa^+ + 1$ es una imagen continua de $\overline{S}$. En particular, si X es un espacio compacto tal que $t(X) > \kappa$, entonces existe un subconjunto cerrado $Y \subseteq X$ tal que $\kappa^+ + 1$ es una imagen continua de Y.

Demostración. Sea $S_\alpha = \{x_\beta : \beta < \alpha\}$ para cada $\alpha \leq \kappa^+$. Veamos que $\kappa^+ + 1$ es una imagen continua de $Y = \overline{S}$.
Definamos $f(x_n) = n$ para cada $n \in \omega$; si $\alpha \in \kappa^+ \backslash \omega$, definamos $f(x_\alpha) = \alpha + 1$. Si $x \in \overline{S} \backslash S$, entonces el ordinal $f(x) = min\{\alpha \leq \kappa^+ : x \in \overline{S_\alpha}\}$ está bien definido; además, $f(x)$ es un ordinal límite para cada $x \in \overline{S} \backslash S$ puesto que si $\alpha = \gamma + 1$, entonces $x \in \overline{S_\alpha}$ implica que $x \in \overline{S_\alpha} \backslash S_\alpha$ y por tanto $x \in \overline{S_\alpha \backslash \{x_\gamma\}} = \overline{S_\gamma}$. Lo anterior define un mapeo $f : Y \to \kappa^+ + 1$.
Notemos que x_α es un punto aislado en Y para cada $\alpha < \kappa^+$, por lo que es suficiente demostrar la continuidad de f en cada punto $x \in Y \backslash S$. Si $f(x) = \alpha$ y $U \in \tau(\alpha, \kappa^+ + 1)$, entonces existe $\beta < \alpha$ tal que $(\beta, \alpha] = \{\gamma \in \kappa^+ : \beta < \gamma \leq \alpha\} \subseteq U$. Puesto que el conjunto S es una sucesión libre, se sigue de la definición de $f(x)$ que el conjunto $W = X \backslash \overline{S_{\beta+1} \cup (S \backslash S_\alpha)}$ es una vecindad abierta de x. Notemos que $x_\gamma \in W$ implica que $\gamma \in (\beta, \alpha)$ y por tanto $f(x_\gamma) \in (\beta, \alpha) \subseteq U$. Además, si $y \in (Y \backslash S) \cap W$, entonces $y \notin \overline{S \backslash S_\alpha}$ y por lo tanto $y \in \overline{S_\alpha}$; lo anterior implica que $f(y) \leq \alpha$. De $y \notin \overline{S_{\beta+1}}$ se sigue que $f(y) \geq \beta + 1 > \beta$, esto es,

$f(y) \in (\beta, \alpha]$. Esto demuestra que $f(W \cap Y) \subseteq (\beta, \alpha] \subseteq U$ y por tanto f es continua en el punto x. Dado que el punto $x \in Y \backslash S$ fue tomado arbitrariamente, f es un mapeo continuo. El conjunto $f(S)$ es denso en $\kappa^+ + 1$, por lo cual $f(\overline{S}) = \kappa^+ + 1$, es decir la primera parte del teorema está demostrada.
Si X es compacto y $t(X) > \kappa$, entonces existe una sucesión libre $S = \{x_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ en X [Tk7, Problem 328]. Tomando $Y = \overline{S}$ y aplicando la primera parte de este teorema, concluimos que $\kappa^+ + 1$ es una imagen continua de Y. ■

Teorema 1.3.21. Si X es un espacio compacto tal que $t(X) > \omega$, entonces X contiene una ω_1-sucesión convergente.

Demostración. Del Teorema 1.3.20 se sigue que existe un conjunto cerrado $H \subseteq X$ tal que $\omega_1 + 1$ es una imagen continua de X. Por la Afirmación en el Teorema 1.3.18, existe un conjunto cerrado $H' \subseteq H$ y un mapeo continuo e irreducible $f : H' \to \omega_1 + 1$. Puesto que es suficiente encontrar una ω_1-sucesión convergente en H', sin perdida de generalidad supondremos que existe un mapeo continuo e irreducible $f : X \to \omega_1 + 1$.
Definamos al conjunto $X_\alpha = f^{-1}(\alpha)$ para cada $\alpha \leq \omega_1$. Notemos primero que X_{ω_1} es denso en ninguna parte en X ya que, en caso contrario, existe un abierto no vacío $U \subseteq X_{\omega_1}$ y en consecuencia $(\omega_1 + 1) \backslash f(X \backslash U)$ es un subconjunto abierto no vacío contenido en $\{\omega_1\}$ lo que es una contradicción. Sea $Y_\alpha = \bigcup\{X_\beta : \alpha \leq \beta \leq \omega_1\}$ para cada $\alpha < \omega_1$. Si $\pi\chi(x, X_{\omega_1}) > \omega$ para todo $x \in X_{\omega_1}$, entonces por el Teorema 1.3.16, existe un conjunto cerrado $P \subseteq X_{\omega_1}$ tal que $\mathbb{D}^{\omega_1}$ es una imagen continua de P; del Teorema 1.3.18 se sigue que P contiene una ω_1-sucesión convergente. Por lo tanto, sin perdida de generalidad podemos asumir que existe $x \in X_{\omega_1}$ tal que $\pi\chi(x, X_{\omega_1}) = \omega$.
Fijemos una familia $\mathcal{O} = \{O_n : n \in \omega\} \subseteq \tau(X)$ tal que $\{O_n \cap X_{\omega_1} : n \in \omega\}$ es una π-base de X_{ω_1} en el punto x. Tomemos $U_n \in \tau(X)$ tal que $U_n \cap X_{\omega_1} \neq \emptyset$ y $\overline{U_n} \subseteq O_n$ para cada $n \in \omega$. Puesto que $Int(X_{\omega_1}) = \emptyset$, el conjunto $Y = X \backslash X_{\omega_1}$ es denso en X y por tanto $Y \cap U_n$ es denso en U_n para cada $n \in \omega$. El conjunto $A_n = \{\alpha < \omega_1 : U_n \cap X_\alpha \neq \emptyset\}$ es no numerable para cada $n \in \omega$ ya que en caso contrario, si $\beta = supA_n < \omega_1$, entonces $U_n \backslash f^{-1}((0, \beta])$ es un abierto no vacío contenido en X_{ω_1}. Además, $A_n = f(U_n \cap Y)$; puesto que el mapeo $f|_Y$ es cerrado [Tk7, Fact 1, S.261], el conjunto $B_n = f(\overline{U_n} \cap Y)$ es cerrado y no acotado en ω_1 para cada $n \in \omega$. Por lo tanto, el conjunto $B = \bigcap\{B_n : n \in \omega\}$ es también cerrado y no acotado [Ku, Lemma 6.8].
Hagamos $\mathcal{V}_\alpha = \{V \in \tau(x, X) : \text{si } n \in \omega \text{ y } \overline{U_n} \cap X_{\omega_1} \subseteq V, \text{ entonces } \overline{U_n} \cap Y_\alpha \subseteq V\}$ para cada $\alpha < \omega_1$; notemos que $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_\alpha$ implica que $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_\alpha$. Además $\mathcal{V}_\alpha \subseteq \mathcal{V}_\beta$ siempre que $\alpha < \beta < \omega_1$.
Para cada $\alpha < \omega_1$ sea $F_\alpha = \bigcap\{\overline{V} : V \in \mathcal{V}_\alpha\}$. Notemos que para cada conjunto $V \in \tau(x, X)$, existe $\alpha < \omega_1$ tal que $V \in \mathcal{V}_\alpha$. En efecto, $X_{\omega_1} = \bigcap\{Y_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, por lo que $\overline{U_n} \cap X_{\omega_1} \subseteq V$ implica que $\bigcap\{\overline{U_n} \cap Y_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq V$; por lo tanto concluimos que existe $\alpha_n < \omega_1$ tal que $\overline{U_n} \cap Y_{\alpha_n} \subseteq V$ [Tk7, Fact 1, S.326]. Si $\alpha > sup\{\alpha_n : \overline{U_n} \cap X_{\omega_1} \subseteq V\}$, entonces $V \in \mathcal{V}_\alpha$.
En consecuencia, tenemos una familia $\{F_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de subconjuntos cerrados de X tales que $F_\beta \subseteq F_\alpha$ si $\alpha < \beta < \omega_1$ y $\bigcap\{F_\alpha : \alpha < \omega_1\} = \bigcap\{\overline{V} : V \in \tau(x, X)\} = \{x\}$. Para cada ordinal $\alpha < \omega_1$ y cualquier $V \in \mathcal{V}_\alpha$, existe $n \in \omega$ tal que $\overline{U_n} \cap X_{\omega_1} \subseteq O_n \cap X_{\omega_1} \subseteq V$ y en consecuencia $\overline{U_n} \cap Y_\alpha \subseteq V$. Esto implica que $B \backslash \alpha \subseteq B_n \backslash \alpha \subseteq f(\overline{U_n} \cap Y_\alpha) \subseteq f(\overline{V})$ para todo $V \in \mathcal{V}_\alpha$ y por consiguiente $B \backslash \alpha \subseteq f(F_\alpha)$. Por lo tanto, $F_\alpha \neq \{x\}$ para cada $\alpha < \omega_1$.
Observemos que si $Q \subseteq X \backslash \{x\}$ es un conjunto numerable, entonces para cualquier $y \in Q$ existe $\alpha_y < \omega_1$ tal que $y \notin F_{\alpha_y}$; si $\alpha > sup\{\alpha_y : y \in Q\}$, entonces $F_\alpha \cap Q = \emptyset$. Esto hace posible construir por inducción, un conjunto $Z' = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ tal que $x_\alpha \in F_\alpha \backslash \{x\}$ y $x_\alpha \neq x_\beta$ siempre que $\alpha, \beta < \omega_1$ y $\alpha \neq \beta$. Veremos que el conjunto $Z = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\} \cup \{x\}$ es una ω_1-sucesión convergente. Es claro que $|Z| = \omega_1$; además, si $W \in \tau(x, X)$, entonces podemos aplicar [Tk7, Fact 1, S.326] para concluir que existe $\alpha < \omega_1$ tal que $F_\alpha \subseteq W$.

Entonces $Z \backslash W \subseteq \{x_\beta : \beta < \alpha\}$ y por tanto Z es una ω_1-sucesión convergente. ∎

Teorema 1.3.22. Todo espacio compacto de peso a lo más ω_1 y con diagonal pequeña es metrizable.

Demostración. Dado un espacio Y y un conjunto $A \subseteq Y$, decimos que x es un punto de acumulación completa de A si $|A \cap U| = |A|$ para cada $U \in \tau(x, Y)$. Es un teorema clásico que un espacio Y es compacto si y sólo si cada conjunto infinito $B \subseteq Y$ tiene un punto de acumulación completa [En, Problem 3.12.1].
Sea X un espacio compacto con diagonal pequeña tal que $w(X) \leq \omega_1$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $X \subseteq [0,1]^{\omega_1}$ [En, Theorem 2.3.23]. Para cada $\alpha < \omega_1$ sea $p_\alpha : [0,1]^{\omega_1} \to [0,1]^\alpha$ la proyección natural sobre la cara $[0,1]^\alpha$. Supongamos que existe $\alpha < \omega_1$ tal que para todos $x, y \in X$, si $x \neq y$, entonces $p_\alpha(x) \neq p_\alpha(y)$. Es claro que el mapeo $p_\alpha|_X : X \to p_\alpha(X) \subseteq [0,1]^\alpha$ es una condensación y en consecuencia, por la compacidad de X, es un homeomorfismo. Lo anterior implica que $w(X) \leq w([0,1]^\alpha) = w([0,1]^\omega) = \omega$.

Para probar que un tal $\alpha < \omega_1$ existe supongamos lo contrario; entonces, para cada $\alpha < \omega_1$ podemos encontrar $x_\alpha, y_\alpha \in X$ tales que $p_\alpha(x_\alpha) = p_\alpha(y_\alpha)$ pero $x_\alpha \neq y_\alpha$. Puesto que X tiene diagonal pequeña, existe un conjunto no numerable $A \subseteq \omega_1$ y $U \in \tau(\Delta, X^2)$ tales que $U \cap \{(x_\alpha, y_\alpha) : \alpha \in A\} = \emptyset$. Existe un punto $x \in X$ de acumulación completa de $Z = \{x_\alpha : \alpha \in A\}$; sea $V = \prod_{\alpha<\omega_1} V_\alpha$ un abierto estándar en $[0,1]^{\omega_1}$ tal que $x \in V' = V \cap X$ y $V' \times V' \subseteq U$. Hagamos $supp(V) = \{\gamma < \omega_1 : V_\gamma \neq [0,1]\}$. Puesto que x es un punto de acumulación completa de Z, existe $\beta \in A$ tal que $x_\beta \in V'$ y $\beta > max(supp(V))$. Como $V_\alpha = [0,1]$ para cada $\alpha \geq \beta$ y $p_\beta(x_\beta) = p_\beta(y_\beta)$, tenemos que $y_\beta \in V'$. Lo anterior implica que $(x_\beta, y_\beta) \in V' \times V' \subseteq U$, por lo cual, $U \cap \{(x_\alpha, y_\alpha) : \alpha \in A\} \neq \emptyset$, lo que es una contradicción. ∎

Dado un cardinal infinito κ, un espacio X es κ-monolítico si $nw(\overline{A}) \leq \kappa$ para cada $A \in [X]^{\leq\kappa}$. Diremos que X es monolítico si es κ-monolítico para todo cardinal infinito κ. Es claro que cualquier subconjunto de un espacio κ-monolítico es también κ-monolítico.

Teorema 1.3.23. Sea X un espacio compacto con diagonal pequeña. Si X es ω-monolítico y tiene estrechez numerable, entonces es metrizable.

Demostración. Haremos uso del siguiente resultado: Si Z es un espacio compacto tal que $\overline{A}$ es metrizable para cada $A \in [Z]^{\leq\omega_1}$, entonces Z es metrizable [Dow].
Por lo anterior basta demostrar que cada subespacio de cardinalidad a lo más ω_1 es metrizable. Sea $A \in [X]^{\leq\omega_1}$ y $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ una numeración de A. Puesto que X tiene estrechez numerable, se tiene la igualdad $\overline{A} = \bigcup\{\overline{\{x_\beta : \beta < \alpha\}} : \alpha < \omega_1\}$. Dado que X es ω-monolítico, el conjunto $\overline{\{x_\beta : \beta < \alpha\}}$ tiene peso de red numerable para cada $\alpha < \omega_1$. Es fácil ver que el conjunto $\overline{A}$ tiene peso de red a lo más ω_1 al ser una unión de una familia de cardinalidad a lo más ω_1 y cuyos elementos tienen peso de red numerable. El conjunto $\overline{A}$ es compacto así que $w(\overline{A}) = nw(\overline{A}) \leq \omega_1$ [Tk7, Fact 4, S.307]. Finalmente, por el Teorema 1.3.22 el espacio $\overline{A}$ es metrizable, y por consiguiente A también. ∎

Teorema 1.3.24. Bajo la Hipótesis del Continuo, todo espacio compacto con diagonal pequeña es metrizable.

Demostración. Sea X un espacio compacto con diagonal pequeña. De la Proposición 1.3.9 y el Teorema 1.3.21 se sigue que $t(X) \leq \omega$. Dado un conjunto numerable $A \subseteq X$, tenemos que $w(\overline{A}) \leq 2^{|A|} \leq \mathfrak{c}$ [Tk7, Fact 2, S.368] y en consecuencia $w(\overline{A}) \leq \omega_1$ por la Hipótesis del Continuo. Por la Proposición 1.3.8 y el Teorema 1.3.22, concluimos que $\overline{A}$ es metrizable y por consiguiente X es ω-monolítico. Finalmente, el espacio X es metrizable por el Teorema

1.3.23. ■

Teorema 1.3.25. Supongamos que X es un espacio Lindelöf Σ con diagonal pequeña. Si $\mathcal{C}$ es una cubierta compacta de X cuyos elementos son metrizables y existe una red numerable $\mathcal{N}$ con respecto a $\mathcal{C}$, entonces X tiene peso de red numerable.

Demostración. Consideremos las siguientes afirmaciones:

Afirmación 1. Para cualquier espacio Z, los conjuntos cocero forman una base.

Sean $x \in Z$ y $U \in \tau(x, Z)$. El conjunto $Z \backslash U$ es cerrado y $x \notin Z \backslash U$. Existe una función continua $f : Z \to [0,1]$ tal que $f(x) = 1$ y $f(Z \backslash U) \subseteq \{0\}$. Si $V = f^{-1}((0,1])$, entonces V es un conjunto cocero y $x \in V \subseteq U$. □

Afirmación 2. Sea Z un espacio Lindelöf Σ. Si $\mathcal{K}$ es una cubierta compacta de Z y $\mathcal{F}$ es una red numerable con respecto a $\mathcal{K}$, entonces $\{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\}$ también es una red numerable con respecto a $\mathcal{K}$.

Sean $K \in \mathcal{K}$ y $U \in \tau(K, Z)$. Por la normalidad de Z existe $V \in \tau(K, Z)$ tal que $\overline{V} \subseteq U$. Tomemos $F \in \mathcal{F}$ para el cual $K \subseteq F \subseteq V$; entonces $K \subseteq \overline{F} \subseteq \overline{V} \subseteq U$ y por lo tanto $\{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\}$ es una red numerable con respecto a $\mathcal{K}$. □

Afirmación 3. Sea Z un espacio Lindelöf Σ. Si existe una familia numerable $\mathcal{F}$ de cerrados que separa los puntos de Z en el sentido T_1, es decir, para cada par de puntos distintos $x, y \in Z$, existen $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $y \notin A \ni x$ y $x \notin B \ni y$, entonces Z tiene peso de red numerable.

Existe una cubierta compacta $\mathcal{K}$ de Z y una red numerable $\mathcal{R}$ con respecto a $\mathcal{K}$. Sea $\mathcal{N} = \bigwedge(\mathcal{R} \cup \mathcal{F})$; es claro que $\mathcal{N}$ es numerable. Resulta que $\mathcal{N}$ es una red en Z.
Para verlo tomemos cualesquiera $x \in Z$ y $U \in \tau(x, Z)$. Existe $K \in \mathcal{K}$ tal que $x \in K$. Para cada $y \in K \backslash U$ elijamos $F_y \in \mathcal{F}$ tal que $y \notin F_y$ y $x \in F_y$. Por la compacidad de $K \backslash U$, existe $A \in [K \backslash U]^{<\omega}$ para el cual $K \backslash U \subseteq \bigcup_{y \in A} Z \backslash F_y$. Entonces $K \subseteq U \cup \bigcup_{y \in A} Z \backslash F_y$, así que existe $R \in \mathcal{R}$ tal que $K \subseteq R \subseteq U \cup \bigcup_{y \in A} Z \backslash F_y$. Si $N = R \cap \bigcap_{y \in A} F_y$, entonces $x \in N \subseteq U$ y $N \in \mathcal{N}$. Por lo tanto, $\mathcal{N}$ es una red numerable en Z. □

Por la Afirmación 2, sin pérdida de generalidad podemos suponer que los elementos de la familia $\mathcal{N}$ son cerrados. Además, como la familia $\bigwedge \mathcal{N}$ sigue siendo una red numerable de cerrados con respecto a $\mathcal{C}$, también podemos suponer que $\mathcal{N} = \bigwedge \mathcal{N}$, es decir, la familia $\mathcal{N}$ es invariante bajo intersecciones finitas. Para cada $C \in \mathcal{C}$, sea $\mathcal{N}_C = \{N \in \mathcal{N} : C \subseteq N\}$. Si $p \in X$ y $\mathcal{A}$ es una familia de subconjuntos de X, diremos que $\mathcal{A}$ genera una red en p si $\bigwedge\{A \in \mathcal{A} : p \in A\}$ es una red en p. La siguiente propiedad es crucial:

(1) Para cada $C \in \mathcal{C}$, existe una familia numerable $\mathcal{U}_C$ de conjuntos cocero tal que $\mathcal{U}_C = \bigwedge \mathcal{U}_C$ y $\mathcal{U}_C \cup \mathcal{N}_C$ genera una red en cada punto de C.

Para demostrar (1), tomemos un conjunto arbitrario $C \in \mathcal{C}$. Como C es metrizable y compacto, existe una base numerable $\mathcal{B}_C$ para el subespacio C. Para cada par de elementos con cerradura disjunta $B_0, B_1 \in \mathcal{B}_C$, podemos escojer conjuntos cocero $E(B_0, B_1)$ y $D(B_0, B_1)$ tales que $E(B_0, B_1) \cap D(B_0, B_1) = \emptyset$ mientras $B_0 \subseteq E(B_0, B_1)$ y $B_1 \subseteq D(B_0, B_1)$. Sea $\mathcal{U}_C = \bigwedge\{E(B_0, B_1),\ D(B_0, B_1) : B_0, B_1 \in \mathcal{B}_C \text{ y } \overline{B_0} \cap \overline{B_1} = \emptyset\}$. Supongamos que $p \in C$ y consideremos $U \in \tau(p, X)$. Sea $\{N_m : m \in \omega\}$ una numeración de todos los elementos de $\mathcal{U}_C \cup \mathcal{N}_C$ que contienen a p tal que cada elemento de $\mathcal{N}_C$ aparece una cantidad infinita de veces en la sucesión $\{N_m : m \in \omega\}$. Si ninguna intersección finita de elementos de $\{N_m : m \in \omega\}$ está contenida en U, entonces escojamos $x_n \in \bigcap_{i \leq n} N_i \backslash U$. Para ver que $\{x_n : n < \omega\}$ tiene un punto de acumulación $q \in C$ supongamos lo contrario. Entonces para cada $y \in C$ existe $U_y \in \tau(y, X)$ tal que $|\{n < \omega : x_n \in U_y\}| < \omega$. Por la compacidad de C podemos encontrar $A \in [C]^{<\omega}$ tal que $C \subseteq \bigcup_{y \in A} U_y$. Existe $m > max\{n : x_n \in \bigcup_{y \in A} U_y\}$ tal que $N_m \in \mathcal{N}_C$

y $C \subseteq N_m \subseteq \bigcup_{y\in A} U_y$; esto último implica que $m \leq max\{n : x_n \in \bigcup_{y\in A} U_y\} < m$, lo que es una contradicción. Por consiguiente, un tal $q \in C$ existe. Es claro que $q \notin U$, por lo que $p \neq q$. Sean $B_0, B_1 \in \mathcal{B}_C$ vecindades de p y q, respectivamente, tales que $\overline{B_0} \cap \overline{B_1} = \emptyset$. Por tal motivo, existe $V \in \mathcal{U}_C$ tal que $p \in V$ y $q \notin \overline{V}$. Como $V \in \mathcal{U}_C$, existe $m < \omega$ tal que $V = N_m$, por lo cual $\{x_n : n \geq m\} \subseteq V$. Lo anterior implica que $q \notin \overline{\{x_n : n \geq m\}}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto existe una intersección finita de elementos de $\mathcal{U}_C \cup \mathcal{N}_C$ que esta contenida en U, es decir, $\mathcal{U}_C \cup \mathcal{N}_C$ genera una red en p. Esto finaliza la demostración de (1).

Veamos ahora que:

(2) existe una familia numerable $\mathcal{U}$ de conjuntos cocero tal que $\mathcal{U} \cup \mathcal{N}$ separa los puntos de X en el sentido T_1.

Supongamos que tal familia no existe. Sean $C_0 \in \mathcal{C}$ y $\mathcal{U}_{C_0}$ como en la propiedad (1). Por hipótesis la familia $\mathcal{U}_{C_0} \cup \mathcal{N}$ no es T_1-separadora, por lo que existen puntos distintos $x_1, y_1 \in X$ tales que cada elemento de $\mathcal{U}_{C_0} \cup \mathcal{N}$ que contenga a x_1, también contiene a y_1. Como $\mathcal{N}$ es una red con respecto a $\mathcal{C}$, cada elemento de $\mathcal{C}$ que contenga a x_1, también contiene a y_1 así que existe $C_1 \in \mathcal{C}$ tal que $x_1, y_1 \in \mathcal{C}_1$. Sea $\mathcal{U}_{C_1}$ como en la propiedad (1).
Supongamos que $\alpha < \omega_1$ y hemos obtenido $C_\beta \in \mathcal{C}$ y puntos distintos $x_\beta, y_\beta \in C_\beta$ para todo $\beta \in (0, \alpha)$, tales que cada elemento de la familia $\mathcal{N} \cup (\bigcup_{\gamma<\beta} \mathcal{U}_{C_\gamma})$ que contenga a x_β, también contiene a y_β. Puesto que $\mathcal{N} \cup (\bigcup_{\gamma<\alpha} \mathcal{U}_{C_\gamma})$ no es T_1-separadora, podemos encontrar puntos distintos $x_\alpha, y_\alpha \in X$ tales que cada elemento de la familia $\mathcal{N} \cup (\bigcup_{\gamma<\alpha} \mathcal{U}_{C_\gamma})$ que contenga a x_α, también contiene a y_α. Elijamos $C_\alpha \in \mathcal{C}$ tal que $x_\alpha \in C_\alpha$, y notemos que también $y_\alpha \in C_\alpha$.
Entonces podemos encontrar x_α, y_α, y C_α que satisfacen las condiciones anteriores para cada $\alpha < \omega_1$. Puesto que el espacio X tiene diagonal pequeña, existe $G \in \tau(\Delta, X^2)$ tal que $\{(x_\alpha, y_\alpha) : \alpha \in E\} \subseteq X^2 \backslash G$ para algún conjunto no numerable $E \subseteq \omega_1$. Para cada $z = (x, y) \in X^2 \backslash G$ podemos elegir $U_z \in \tau(x, X)$ y $V_z \in \tau(y, X)$ tales que $\overline{U_z} \cap \overline{V_z} = \emptyset$. Como X es Lindelöf Σ, el espacio X^2 es Lindelöf y por consiguiente $X^2 \backslash G$ también lo es. Entonces, podemos encontrar un conjunto numerable $G' \subseteq X^2 \backslash G$ tal que $X^2 \backslash G \subseteq \bigcup_{z\in G'} (U_z \times V_z)$. Luego, existen $E' \in [E]^{\omega_1}$ y $z \in G'$ tales que $\{(x_\alpha, y_\alpha) : \alpha \in E'\} \subseteq U_z \times V_z$. Esto implica que existen conjuntos cerrados y disjuntos H_0,H_1 tales que $\{x_\alpha : \alpha \in E'\} \subseteq H_0$ y $\{y_\alpha : \alpha \in E'\} \subseteq H_1$.
Consideremos un ordinal arbitrario $\alpha \in E'$. Dado cualquier $p \in C_\alpha$, como las familias $\mathcal{N}$ y $\mathcal{U}_{C_\alpha}$ son invariantes bajo intersecciones finitas, por la propiedad (1), existen $U_p^\alpha \in \mathcal{U}_{C_\alpha}$ y $N_p^\alpha \in \mathcal{N}_{C_\alpha}$ tales que $p \in U_p^\alpha$ y $U_p^\alpha \cap N_p^\alpha$ no interseca a H_0 ó H_1. Por la compacidad de C_α existen subcolecciónes finitas $U_0^\alpha, U_1^\alpha, \ldots, U_{n_\alpha}^\alpha$ de $\mathcal{U}_{C_\alpha}$ y $N_0^\alpha, N_1^\alpha, \ldots, N_{n_\alpha}^\alpha$ de $\mathcal{N}_{C_\alpha}$ tales que $C_\alpha \subseteq U^\alpha = U_0^\alpha \cup \ldots \cup U_{n_\alpha}^\alpha$ y cada $U_i^\alpha \cap N_i^\alpha$ no interseca a H_0 ó H_1. Como $\mathcal{N}$ es una red con respecto a $\mathcal{C}$, existe $N' \in \mathcal{N}$ tal que $C_\alpha \subseteq N' \subseteq U^\alpha$. Si $N^\alpha = N' \cap \bigcap_{0\leq i\leq n_\alpha} N_i^\alpha$, entonces $N^\alpha \in \mathcal{N}$ y $C_\alpha \subseteq N^\alpha \subseteq U^\alpha$.
Puesto que la familia $\mathcal{N}$ es numerable, existen $\alpha_1 < \alpha_2$ tales que $N^{\alpha_1} = N^{\alpha_1} = N$. Entonces $C_{\alpha_1} \cup C_{\alpha_2} \subseteq N \subseteq U^{\alpha_1}$. Escojamos $i \leq n_{\alpha_1}$ tal que $x_{\alpha_2} \in U_i^{\alpha_1}$. Puesto que $U_i^{\alpha_1} \cap N_i^{\alpha_1}$ no interseca a H_0 ó H_1 y $x_{\alpha_2} \in H_0$, se sigue que no interseca H_1. Por consiguiente, $x_{\alpha_2} \in U_i^{\alpha_1} \cap N_i^{\alpha_1}$ y $y_{\alpha_2} \notin U_i^{\alpha_1} \cap N_i^{\alpha_1}$, lo que contradice la forma en que x_{α_2} y y_{α_2} fueron escojidos. Esta contradicción termina la demostración de (2).

Tomemos una familia $\mathcal{U}$ que satisface la condición (2). Como todo conjunto cocero es F_σ, para cada $U \in \mathcal{U}$ existe una familia numerable $\mathcal{R}_U$ de conjuntos cerrados tal que $U = \bigcup \mathcal{R}_U$. La familia $\mathcal{N} \cup \bigcup\{\mathcal{R}_U : U \in \mathcal{U}\}$ consta de cerrados y separa los puntos de X en el sentido T_1. Por la Afirmación 3, el espacio X tiene peso de red numerable. ■

Teorema 1.3.26. Bajo la hipótesis del continuo, cada espacio Lindelöf Σ con diagonal pequeña tiene peso de red numerable.

Demostración. Supongamos que X un espacio Lindelöf Σ con diagonal pequeña. Sea $\mathcal{C}$ una cubierta compacta de X y $\mathcal{R}$ una red numerable con respecto a $\mathcal{C}$. Por el Teorema 1.3.24, cada elemento de $\mathcal{C}$ es metrizable. Finalmente, por el Teorema 1.3.25, el espacio X tiene peso de red numerable. $\blacksquare$

1.4. Espacios hereditariamente Lindelöf Σ

Esta es la parte final del Capítulo 1 en la cual presentaremos un resultado de Gruenhage que establece que todo espacio Lindelöf Σ con diagonal G_δ tiene peso de red numerable. Probaremos que cualquier espacio hereditariamente Lindelöf tiene cardinalidad a lo más $\mathfrak{c}$ lo cual es un teorema perteneciente a de Groot. El resultado principal de esta sección es el teorema de Hodel sobre los espacios hereditariamente Lindelöf Σ. Como un resultado auxiliar se demostrará el teorema de Uspensky del número de Lindelöf de la ω-modificación de un espacio disperso.

Definición 1.4.1. Diremos que un espacio X tiene diagonal G_δ si $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$ es un conjunto G_δ en X^2. Es claro que la propiedad de tener diagonal G_δ es hereditaria.

Proposición 1.4.2. Todo espacio X con diagonal G_δ tiene diagonal pequeña.

Demostración. Tomemos una familia $\{U_n : n < \omega\} \subseteq \tau(X^2)$ tal que $\Delta = \bigcap_{n<\omega} U_n$. Si Y es un subconjunto no numerable de $X^2\backslash\Delta$, entonces existe $n < \omega$ tal que $Y\backslash U_n$ es no numerable, pues en caso contrario $|Y\backslash U_n| \leq \omega$ para todo $n < \omega$ y por lo tanto $Y\backslash\Delta = Y\backslash \bigcap_{n<\omega} U_n = \bigcup_{n<\omega}(Y\backslash U_n)$ es numerable, lo que es una contradicción. ■

Dada una familia $\mathcal{A} \subseteq exp(X)$, definamos $st(B,\mathcal{A}) = \bigcup\{A \in \mathcal{A} : A \cap B \neq \emptyset\}$ para cada $B \subseteq X$. Si $B = \{x\}$, escribiremos $st(x,\mathcal{A})$ en lugar de $st(\{x\},\mathcal{A})$.

Proposición 1.4.3. Las siguientes condiciones son equivalentes para todo espacio X:
(a) X tiene diagonal G_δ;
(b) existe una familia $\{\mathcal{U}_n : n < \omega\}$ de cubiertas abiertas de X tal que para cada $x \in X$ se tiene $\bigcap_{n<\omega} st(x,\mathcal{U}_n) = \{x\}$.

Demostración. Supongamos que X tiene diagonal G_δ y por lo tanto existe una sucesión $\{U_n\}_{n<\omega}$ de abiertos en X^2 tal que $\Delta = \bigcap_{n<\omega} U_n$.
Para cada $n < \omega$ consideremos la familia $\mathcal{U}_n = \{V \in \tau(X) : V \times V \subseteq U_n\}$; es claro que $\mathcal{U}_n$ es una cubierta de X. Sea $x \in X$ y supongamos que $y \in \bigcap_{n<\omega} st(x,\mathcal{U}_n)$. Para cada $n < \omega$ existe $V_n \in \tau(X)$ tal que $(x,y) \in V_n \times V_n \subseteq U_n$. Lo anterior implica que $(x,y) \in \bigcap_{n<\omega} U_n = \Delta$, y por consiguiente $x = y$. Por lo tanto, $\bigcap_{n<\omega} st(x,\mathcal{U}_n) = \{x\}$. Esto demuestra que (a) implica (b).
Supongamos ahora que X satisface (b). Definamos $U_n = \bigcup\{V \times V : V \in \mathcal{U}_n\}$ para cualquier $n < \omega$. Como $\mathcal{U}_n$ es una cubierta de X para cada $n < \omega$, es claro que $\Delta \subseteq \bigcap_{n<\omega} U_n$. Si $(x,y) \in \bigcap_{n<\omega} U_n$, entonces para todo $n < \omega$, existe $V_n \in \mathcal{U}_n$ tal que $x, y \in V_n$, lo que implica que $y \in st(x,\mathcal{U}_n)$; luego, $y \in \bigcap_{n<\omega} st(x,\mathcal{U}_n) = \{x\}$, esto es, $y = x$. De lo anterior concluimos que $\bigcap_{n<\omega} U_n \subseteq \Delta$. Esto comprueba que X tiene diagonal G_δ. ■

Si una familia de cubiertas abiertas satisface la condición (b) en la Proposición 1.4.3, diremos que es una sucesión G_δ-diagonal.

Teorema 1.4.4. Supongamos que X es un espacio de Lindelöf. Si X tiene diagonal G_δ, entonces $iw(X) \leq \omega$.

Demostración. Por la Proposición 1.4.3 existe una sucesión G_δ-diagonal $\{\mathcal{U}_n\}_{n<\omega}$. La siguiente propiedad es inmediata:

(1) si $\mathcal{V}_n$ es un refinamiento de $\mathcal{U}_n$ para cada $n < \omega$, entonces $\{\mathcal{V}_n\}_{n<\omega}$ también es una sucesión G_δ-diagonal.

Por la Afirmación 1 en el Teorema 1.3.26, los conjuntos cocero forman una base en X. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que cada familia $\mathcal{U}_n$ consta de conjuntos cocero. Puesto que el conjunto X es Lindelöf, de nuevo, por la propiedad (1), podemos considerar que cada $\mathcal{U}_n$ es numerable.
Para cada $U \in \bigcup_{n<\omega} \mathcal{U}_n$ existe $f_U : X \to \mathbb{R}$ tal que $U = {f_U}^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$. Fijémonos en la función $\varphi = \triangle\{f_U : U \in \bigcup_{n<\omega} \mathcal{U}_n\} : X \to \varphi(X) \subseteq \mathbb{R}^{\bigcup_{n<\omega} \mathcal{U}_n} \simeq \mathbb{R}^{\omega}$. Basta probar que φ es inyectiva. Dados dos puntos distintos $x, y \in X$, puesto que $\{x\} = \bigcap_{n<\omega} st(x,\mathcal{U}_n)$, existe $m < \omega$ tal que $y \notin st(x,\mathcal{U}_m)$. Tomemos cualquier $U \in \mathcal{U}_m$ para el cual $x \in U$. Entonces $y \notin U$ y $\varphi(x)(U) = f_U(x) \neq 0 = f_U(y) = \varphi(y)(U)$. Esto demuestra que φ es inyectiva y por lo tanto, $iw(X) \leq \omega$. ■

Corolario 1.4.5. Si X es un espacio Lindelöf Σ con diagonal G_δ, entonces X tiene peso de red numerable.

Demostración. Por los Teoremas 1.3.4 y 1.2.18, el espacio X tiene i-peso numerable y es estable. Una consecuencia inmediata es que $nw(X) \leq \omega$. ■

Corolario 1.4.6. Todo espacio compacto con diagonal G_δ es metrizable.

Proposición 1.4.7. Si un espacio X es hereditariamente Lindelöf y existe una familia numerable de conjuntos cerrados $\mathcal{F}$ que separa los puntos de X en el sentido T_0, entonces existe una familia numerable de conjuntos cerrados que separa los puntos de X en el sentido T_1.

Demostración. Necesitaremos la siguiente proposición:

Afirmación. Si Z es un espacio hereditariamente Lindelöf, entonces cualquier $U \in \tau^*(Z)$ es un conjunto F_σ.

Para cada $x \in U$, existe $V_x \in \tau(x, Z)$ tal que $V_x \subseteq \overline{V_x} \subseteq U$; puesto que U es un espacio de Lindelöf, existe $A \subseteq U$ tal que $U = \bigcup_{x\in A} \overline{V_x}$. □

Para cada $F \in \mathcal{F}$ tomemos una familia numerable de conjuntos cerrados $\mathcal{R}_F$ en X tal que $X\backslash F = \bigcup \mathcal{R}_F$. La familia $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cup \bigcup\{\mathcal{R}_F : F \in \mathcal{F}\}$ es numerable y consta de conjuntos cerrados. Basta demostrar que $\mathcal{G}$ separa los puntos de X en el sentido T_1. Dados dos puntos distintos $x, y \in X$, podemos escoger $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \cap \{x, y\}$ consta de un solo elemento.
- Si $x \in F$, entonces $y \notin F$ y $F \in \mathcal{G}$.
- Si $x \notin F$, entonces $y \in F$ y $x \in \bigcup \mathcal{R}_F$ así que existe $R \in \mathcal{R}_F$ tal que $x \in R$; se tiene que $y \notin R$ y $R \in \mathcal{G}$.

Esto demuestra que $\mathcal{G}$ separa los puntos de X en el sentido T_1. ■

Teorema 1.4.8. Si X es un espacio hereditariamente Lindelöf, entonces $|X| \leq \mathfrak{c}$.

Demostración. Por la Afirmación en la Proposición 1.4.7, para cada $x \in X$ existe una familia numerable $\mathcal{U}_x \subseteq \tau(X)$ tal que $\bigcap \mathcal{U}_x = \{x\}$.
Sea $A_0 \in [X]^{\leq \mathfrak{c}}$ arbitrario y no vacío. Supongamos que $\alpha < \omega_1$ y hemos escogido un conjunto $A_\beta \subseteq X$ para cada $\beta < \alpha$ tal que:
(1) $|A_\beta| \leq \mathfrak{c}$;
(2) si $\mathcal{W} \in [\bigcup\{\mathcal{U}_x : x \in \bigcup_{\delta<\beta} A_\delta\}]^{\leq\omega}$ y $\bigcup \mathcal{W} \neq X$, entonces $A_\beta \backslash \bigcup \mathcal{W} \neq \emptyset$.

Para cada $\mathcal{W} \in [\bigcup\{\mathcal{U}_z : z \in \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta\}]^{\leq\omega}$, si $\bigcup \mathcal{W} \neq X$, escojamos $x(\mathcal{W}) \in X \backslash \bigcup \mathcal{W}$. Sea $A_\alpha = \{x(\mathcal{W}) : \mathcal{W} \in [\bigcup\{\mathcal{U}_z : z \in \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta\}]^{\leq\omega}$ y $\bigcup \mathcal{W} \neq X\}$. Es claro que A_α satisface (1) y (2), por lo que podemos continuar la inducción.
El conjunto $A = \bigcup_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$ tiene cardinalidad a lo más $\mathfrak{c}$. Supongamos que existe $y \in X\backslash A$. Para cada $x \in A$ podemos escoger $U_x \in \mathcal{U}_x$ tal que $y \notin U_x$. Existe un conjunto numera-

ble $B \subseteq A$ tal que $A \subseteq \bigcup_{x\in B} U_x$. Sea $\{x_n : n < \omega\}$ una numeración de B. Para cada $n < \omega$ existe $\alpha_n < \omega_1$ tal que $x_n \in A_{\alpha_n}$. Si $\alpha = sup_{n<\omega}\alpha_n$, entonces $B \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$, y $\mathcal{W} = \{U_x : x \in B\} \in [\bigcup\{\mathcal{U}_z : z \in \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta\}]^{\leq\omega}$; como $y \notin \bigcup\mathcal{W}$, concluimos aplicando (2), que $A_\alpha\setminus\bigcup\mathcal{W} \neq \emptyset$, lo que es una contradicción con $A_\alpha \subseteq A \subseteq \bigcup\mathcal{W}$. Por lo tanto, $|X| = |A| \leq \mathfrak{c}$. ■

Teorema 1.4.9. Supongamos que un espacio X es hereditariamente Lindelöf. Si $\mathcal{L}$ es la familia de todos los subconjuntos compactos de X, entonces $|\mathcal{L}| \leq \mathfrak{c}$.

Demostración. Obsérvese que $|X| \leq \mathfrak{c}$ y cada subconjunto cerrado de X es G_δ por el Teorema 1.4.8 y la Afirmación de la Proposición 1.4.7. Para cada $x \in X$ existe una familia $\mathcal{U}_x = \{U_n^x : n < \omega\} \subseteq \tau(X)$ tal que $\bigcap_{n<\omega} U_n^x = \{x\}$.
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\overline{U_{n+1}^x} \subseteq U_n^x$ para cada $n < \omega$. La colección $\mathcal{V} = \{\bigcup\mathcal{A} : \mathcal{A} \in [\bigcup_{x\in X}\mathcal{U}_x]^{\leq\omega}\}$ tiene cardinalidad a lo más $\mathfrak{c}$.
Para cualesquiera $L \in \mathcal{L}$ y $x \in X\setminus L$, la familia $\{\overline{U_n^x} \cap L : n < \omega\}$ tiene intersección vacía, luego existe $m(x) < \omega$ tal que $\overline{U_{m(x)}^x} \cap L = \emptyset$, y por tanto $U_{m(x)}^x \subseteq X\setminus L$ [Tk7, Fact 1, S.326].
Entonces, $X\setminus L = \bigcup_{x\in X\setminus L} U_{m(x)}^x$.
Existe un conjunto numerable $A \subseteq X\setminus L$ tal que $X\setminus L = \bigcup_{x\in A} U_{m(x)}^x$ y consecuentemente $X\setminus L \in \mathcal{V}$. Finalmente, $|\mathcal{L}| = |\{X\setminus L : L \in \mathcal{L}\}| \leq |\mathcal{V}| \leq \mathfrak{c}$. ■

Un espacio X es conexo si no existen dos conjuntos abiertos, no vacíos y disjuntos $U, V \subseteq X$ tales que $X = U\cup V$; el espacio X es disconexo si no es conexo. Diremos que X es totalmente disconexo si cada subconjunto de X con más de un elemento, es disconexo.

Proposición 1.4.10. Si un espacio compacto X es totalmente disconexo, entonces para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existe un conjunto abierto-cerrado $W \subseteq X$ tal que $x \in W$ y $y \notin W$.

Demostración. Diremos que $z \in X$ es un amigo de x, si no existe un conjunto abierto-cerrado $W \subseteq X$ tal que $x \in W$ y $z \notin W$. El conjunto $Q = \{z \in X : z \text{ es un amigo de } x\}$ es cerrado y esta contenido en cualquier conjunto abierto-cerrado que contenga a x.
Supongamos que Q es disconexo. Sean A, B conjuntos no vacíos cerrados en Q tales que $Q = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$. Como Q es cerrado en X, los conjuntos A y B también lo son. Para cada $z \in A$ escojamos $U_z \in \tau(z, X)$ tal que $\overline{U_z} \cap B = \emptyset$. Por la compacidad de A existen $z_0, \ldots, z_p \in A$ tales que $A \subseteq \bigcup_{i\leq p} U_{z_i}$. Si $U = \bigcup_{i\leq p} U_{z_i}$ y $V = X\setminus\bigcup_{i\leq p}\overline{U_{z_i}}$, entonces $A = U \cap Q$ y $B = V \cap Q$, y además, U y V son abiertos disjuntos.
Para cada $z \in X\setminus Q$ existe un conjunto abierto-cerrado $W_x \in \tau(x, X)$ tal que $z \notin W_x$; por consiguiente, Q es una intersección de conjuntos abierto-cerrados. Existe una colección finita de conjuntos abierto-cerrados $F_1, \ldots, F_n \subseteq X$ tal que $Q \subseteq F = F_1 \cap \ldots \cap F_n \subseteq U \cup V$ [Tk7, Fact 1, S.326].
El conjunto F es abierto-cerrado y $\overline{U \cap F} \subseteq \overline{U} \cap F = \overline{U} \cap (F \cap (U \cup V)) = F \cap U$; esto muestra que, $F \cap U$ es abierto-cerrado. Como Q esta contenido en cualquier abierto-cerrado que contenga a x, se sigue que $Q \subseteq F \cap U$ y por consiguiente, $B \subseteq U$, lo que es una contradicción. Por lo tanto Q es conexo.
Como X es totalmente disconexo, Q consta de un sólo punto, es decir, $Q = \{x\}$. Finalmente, como y no es un amigo de x, existe un conjunto abierto-cerrado W tal que $x \in W$ y $y \notin W$. ■

Un espacio X es cero-dimensional si tiene una base que consiste de conjuntos abierto-cerrados.

Proposición 1.4.11. Un espacio compacto X es totalmente disconexo si y sólo es cero dimensional.

Demostración. La suficiencia es inmediata así que supongamos que X es totalmente disconexo, $x \in X$ y U es una vecindad abierta de x. Por la Proposición 1.4.10, para cada $y \in X \setminus U$ existe una vecindad abierto-cerrada V_y de y tal que $x \notin V_y$. Por la compacidad de $X \setminus U$, existe un conjunto finito $A \subseteq X \setminus U$, tal que $X \setminus U \subseteq \bigcup_{y \in A} V_y$. Entonces $x \in \bigcap_{y \in A}(X \setminus V_y) \subseteq U$, donde $\bigcap_{y \in A}(X \setminus V_y)$ es un conjunto abierto-cerrado. ■

Proposición 1.4.12. Supongamos que X es un espacio compacto. Si X no es cero-dimensional ó $\mathbb{D}^\omega$ es una imagen continua de X, entonces $[0,1]$ es una imagen continua de X.

Demostración. Si X no es cero-dimensional, entonces por la Proposición 1.4.11, no es totalmente disconexo, luego, existe un conjunto conexo $A \subseteq X$ y dos puntos distintos $x, y \in A$. El conjunto $\overline{A}$ es conexo [En, Corollary 6.1.11]. Puesto que $\overline{A}$ es un espacio de Tychonoff, existe una función continua $f : \overline{A} \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$. El conjunto $f(\overline{A})$ es conexo [En, Theorem 6.1.3] y $0, 1 \in f(\overline{A})$; entonces, $f(\overline{A}) = [0,1]$. Por el teorema de extensión de Tietze-Urysohn, $[0,1]$ es una imagen continua de X.
Si $\mathbb{D}^\omega$ es una imagen continua de X, entonces $[0,1]$ es una imagen continua de X por el Teorema 1.3.10. ■

Definición 1.4.13. Diremos que un espacio X es disperso si cada subconjunto no vacío A de X tiene un punto aislado en A.

Proposición 1.4.14. Supongamos que X es un espacio compacto. Si X no es disperso, entonces no es cero-dimensional ó bien $\mathbb{D}^\omega$ es una imagen continua de X.

Demostración. Supongamos que X no es disperso y es cero-dimensional. Veamos que $\mathbb{D}^\omega$ es una imagen continua de X.
Existe un conjunto sin puntos aislados $A \subseteq X$. Por la Proposición 1.4.11 el espacio X es totalmente disconexo. Definamos $X_\emptyset = X$.
Dados dos puntos distintos, $x, y \in A$, por la Proposición 1.4.10 existen dos conjuntos disjuntos y abierto-cerrados $X_{\{(0,0)\}}, X_{\{(0,1)\}} \subseteq X$ tales que $x \in X_{\{(0,0)\}}$, $y \in X_{\{(0,1)\}}$ y $X = X_{\{(0,0)\}} \cup X_{\{(0,1)\}}$.
Supongamos que $n > 1$ y hemos encontrados una familia de conjuntos abierto-cerrados $\{X_s : s \in \bigcup_{m \leq n} \mathbb{D}^m\}$ tales que $X_s \cap A \neq \emptyset$ para cada $s \in \mathbb{D}^m$ y $m \leq n$, y además, si $m < n$, entonces $X_{s^\frown 0} \cap X_{s^\frown 1} = \emptyset$ y $X_s = X_{s^\frown 0} \cup X_{s^\frown 1}$.
Sea $s \in \mathbb{D}^n$; puesto que $X_s \cap A$ es un subconjunto abierto no vacío de A, se sigue que $|X_s \cap A| > 1$. Dados dos puntos distintos $x', y' \in X_s \cap A$, por la Proposición 1.4.10, podemos encontrar dos conjuntos disjuntos y abierto-cerrados $X^0, X^1 \subseteq X$ tales que $x' \in X^0$, $y' \in X^1$ y $X^0 \cup X^1 = X$. Sean $X_{s^\frown 0} = X_s \cap X^0$ y $X_{s^\frown 1} = X_s \cap X^1$.
De esta manera, podemos construir por inducción una familia de conjuntos no vacíos y abierto-cerrados $\{X_s : s \in \bigcup_{n<\omega} \mathbb{D}^n\}$ tales que $X_s = X_{s^\frown 0} \cup X_{s^\frown 1}$ y $X_{s^\frown 0} \cap X_{s^\frown 1} = \emptyset$ para cada $s \in \mathbb{D}^n$ y $n < \omega$.
De nuestra construcción inductiva, se sigue que para cada $x \in X$, existe un único $f \in \mathbb{D}^\omega$ tal que $x \in \bigcap_{n<\omega} X_{f|_n}$; definamos $\varphi(f) = x$. Dado $f \in \mathbb{D}^\omega$, la familia $\{X_{f|_n} : n < \omega\}$ consta de compactos y es centrada, lo que implica que $\bigcap_{n<\omega} X_{f|_n} \neq \emptyset$. Lo anterior demuestra que la función $\varphi : X \to \mathbb{D}^\omega$ es sobreyectiva.
Resta demostrar que φ es continua. Si $U = \prod_{n<\omega} U_n$ es un abierto estándar en $\mathbb{D}^\omega$ y $supp(U) = \{n < \omega : U_n \neq \mathbb{D}\}$, entonces

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(U) &= \{x \in X : \varphi(x)(n) \in U_n \text{ si } n \in supp(U)\} \\ &= \bigcup \{X_{f|_m} : f \in \mathbb{D}^\omega \text{ y } f(n) \in U_n \text{ si } n \in supp(U)\} \in \tau(X)\end{aligned}$$

donde $m = max(supp(U))$. ■

Teorema 1.4.15. Un espacio compacto X es disperso si y sólo si $[0,1]$ no es una imagen continua de X.

Demostración. Supongamos que X es disperso. Si existe una función continua y sobreyectiva $f : X \to [0,1]$, por la Afirmación en el Teorema 1.3.19, existe un conjunto cerrado $F \subseteq X$ tal que $f(F) = [0,1]$ y $f|_F$ es irreducible. Puesto que F es compacto y disperso, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f : X \to [0,1]$ es irreducible. Para cada $q \in Q = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ escojamos $x_q \in F$ tal que $f(x_q) = q$. Sea $H = \{x_q : q \in Q\}$; el conjunto $f(\overline{H})$ es cerrado en $[0,1]$ y $f(H) = Q \subseteq f(\overline{H})$, luego $[0,1] = \overline{Q} \subseteq f(\overline{H})$. Puesto que f es irreducible, concluimos que $\overline{H} = X$.
Existe un punto aislado $x_p \in H$. Tenemos que $f(\overline{H \backslash \{x_p\}}) = f(X \backslash \{x_p\}) = [0,1] \backslash \{p\}$ es un conjunto cerrado, lo que es una contradicción. Esto demuestra la necesidad.
Supongamos ahora que $[0,1]$ no es una imagen continua de X. Por la Proposición 1.4.12, el espacio X es cero-dimensional y $\mathbb{D}^\omega$ no es una imagen continua de X. Finalmente, por la proposición 1.4.14, X es disperso. ■

Definición 1.4.16. Sea (X, τ) un espacio. La familia de todos los conjuntos G_δ de X forma una base para una topología τ_ω en X. Esta topología es llamada la ω-modificación de la topología τ. Al espacio (X, τ_ω) lo denotaremos por $(X)_\omega$.

Teorema 1.4.17. Supongamos que κ es un cardinal infinito y X es un espacio disperso. Si $l(X) \leq \kappa$, entonces $l((X)_\omega) \leq \kappa$.

Demostración. Sea $\mathcal{G}$ la familia de los conjuntos G_δ de X. Basta demostrar que toda cubierta $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}$ de X, tiene una subcubierta $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{\leq \kappa}$.
A un conjunto $U \in \tau(X)$ lo llamaremos pequeño, si existe $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{\leq \kappa}$ tal que $U \subseteq \bigcup \mathcal{V}$. Notemos que si cada $x \in X$ tiene una vecindad pequeña, entonces X es pequeño, por lo que basta demostrar que todos los puntos de X tienen una vecindad pequeña.
Sea $H = \{x \in X : x$ tiene una vecindad pequeña$\}$. Para cada $x \in H$ escojamos $V_x \in \tau(x, X)$ y $\mathcal{U}_x \in [\mathcal{U}]^{\leq \kappa}$ tales que $V_x \subseteq \bigcup \mathcal{U}_x$.
Supongamos que el conjunto $X \backslash H$ es no vacío y tomemos un punto aislado $y \in X \backslash H$. Existe $V \in \tau(y, X)$ tal que $\overline{V} \cap (X \backslash H) = \{y\}$. Podemos encontrar una familia $\{W_n\}_{n<\omega}$ de subconjunto abiertos de X tal que $y \in W = \bigcap_{n<\omega} W_n \in \mathcal{U}$. Para cada $n < \omega$ las contenciones $\overline{V} \backslash W_n \subseteq \overline{V} \backslash \{y\} = \overline{V} \backslash (X \backslash H) \subseteq H$ implican que $\bigcup_{n<\omega} (\overline{V} \backslash W_n) \subseteq H$. Como cada $\overline{V} \backslash W_n$ es un conjunto cerrado, existe $A_n \in [\overline{V} \backslash W_n]^{\leq \kappa}$ tal que $\overline{V} \backslash W_n \subseteq \bigcup_{x \in A_n} V_x$. Así,

$$V \subseteq \overline{V} \subseteq W \cup (\overline{V} \backslash W) = W \cup \bigcup_{n<\omega} (\overline{V} \backslash W_n) \subseteq W \cup \bigcup_{n<\omega} \bigcup_{x \in A_n} V_x \subseteq W \cup \bigcup_{n<\omega} \bigcup_{x \in A_n} \bigcup \mathcal{U}_x,$$

lo que demuestra que V es una vecindad pequeña de $y \in X \backslash H$, lo que a su vez, es una contradicción. Por lo tanto $H = X$. ■

Teorema 1.4.18. Si X es un espacio hereditariamente Lindelöf, entonces existen conjuntos $A, B \subseteq X$ tales que:
(a) $A \cup B = X$;
(b) todos los subconjuntos compactos de A son numerables;
(c) todos los subconjuntos compactos de B son numerables.

Demostración. Sea $\mathcal{L}$ la familia de todos los subconjuntos compactos no numerables de X. Por el Teorema 1.4.9, podemos encontrar una numeración $\{L_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ de $\mathcal{L}$; además, $|L| \leq |X| \leq \mathfrak{c}$ para cada $L \in \mathcal{L}$ (véase el Teorema 1.4.8).
Si $L \in \mathcal{L}$ y $|L| < \mathfrak{c}$, entonces $[0,1]$ no puede ser imagen continua de L, por lo que L es disperso

(véase el Teorema 1.4.15). El espacio $(L)_\omega$ es Lindelöf por el Teorema 1.4.17. Aplicando la Afirmación de la Proposición 1.4.7, vemos que cada punto $x \in L$ es G_δ, y en consecuencia, el espacio $(L)_\omega$ es discreto, Lindelöf y no numerable, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $|L| = \mathfrak{c}$ para todo $L \in \mathcal{L}$.
Escojamos dos puntos arbitrarios $x_0, y_0 \in L_0$. Supongamos que $\alpha < \mathfrak{c}$ y hemos encontrado dos conjuntos $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$, $\{y_\beta : \beta < \alpha\}$ tales que:
(1) $\{x_\beta : \beta < \alpha\} \cap \{y_\beta : \beta < \alpha\} = \emptyset$, y
(2) si $\beta < \alpha$, entonces $\{x_\beta, y_\beta\} \subseteq L_\beta$.
Puesto que $|L_\alpha| = \mathfrak{c}$, podemos encontrar dos puntos distintos $x_\alpha, y_\alpha \in L_\alpha \setminus (A_\alpha \cup B_\alpha)$. Es claro que $\{x_\beta : \beta \leq \alpha\}$ y $\{y_\beta : \beta \leq \alpha\}$ satisfacen (1) y (2). De modo que podemos continuar la inducción para construir conjuntos $P = \{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ y $Q = \{y_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ que satisfacen (1) y (2). Afirmamos que $A = P$ y $B = X \setminus P$ son los conjuntos prometidos.
Sea L un subconjunto compacto de A. Si $|L| > \omega$, entonces existe $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $L = L_\alpha$; esto implica que $y_\alpha \in Q \cap L \subseteq B \cap L$, lo que contradice que $L \subseteq A$.
Sea L un subconjunto compacto de B. Si $|L| > \omega$, entonces existe $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $L = L_\alpha$ por lo cual $x_\alpha \in P \cap L = A \cap L$, lo que contradice que $L \subseteq B$.
Por lo tanto, si L es un subconjunto compacto de A ó B, es numerable. ■

Teorema 1.4.19. Un espacio X es hereditariamente Lindelöf Σ si y sólo si $nw(X) \leq \omega$.

Demostración. Es claro que si X tiene peso de red numerable, todo subespacio suyo también, y por tanto, es hereditariamente Lindelöf Σ.
Supongamos que X es hereditariamente Lindelöf Σ. Por el Teorema 1.4.18, existen conjuntos $A, B \subseteq X$ tales que $A \cup B = X$ y cada subconjunto compacto de A ó B es numerable. Si demostramos que $nw(A) = nw(B) = \omega$, es evidente que $nw(X) = \omega$, por lo que podemos suponer sin pérdida de generalidad que cada subconjunto compacto de X es numerable.
Sea $\mathcal{C}$ una cubierta compacta de X y $\mathcal{F}$ una red numerable con respecto a $\mathcal{C}$, cuyos elementos son conjuntos cerrados. Consideremos la familia $\mathcal{F}_x = \{F \in \mathcal{F} : x \in F\}$ para cada $x \in X$. Diremos que $x, y \in X$ son amigos si $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}_y$. Es evidente que la relación de amistad es una relación de equivalencia en X; sea $\mathcal{A}$ su conjunto de clases de equivalencia. Dado $x \in X$ escojamos $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C$. Notemos que $\mathcal{F}_C = \{F \in \mathcal{F} : C \subseteq F\} \subseteq \mathcal{F}_x$, y por consiguiente, $\bigcap \mathcal{F}_x \subseteq \bigcap \mathcal{F}_C = C$; esto implica que $\bigcap \mathcal{F}_x$ es compacto. El conjunto $A_x = \{z \in X : z$ es amigo de $x\}$ esta contenido en $\bigcap \mathcal{F}_x$, y por tanto es numerable.
Para cada $A \in \mathcal{A}$ podemos escoger una numeración $\{x_n^A : n < \omega\}$ de A. Definamos $X_n = \{x_n^A : A \in \mathcal{A}\}$ para cualquier $n < \omega$. Es claro que $\bigcup_{n<\omega} X_n = X$ y $X_n \cap A = \{x_n^A\}$ paraa todo $A \in \mathcal{A}$ y $n < \omega$.
Sea $n < \omega$ arbitrario. La familia $\mathcal{F}_n = \{F \cap X_n : F \in \mathcal{F}\}$ consta de subconjuntos cerrados de X_n. Afirmamos que $\mathcal{F}_n$ separa los puntos de X_n en el sentido T_0.
Tomemos puntos distintos $x, y \in X_n$. Puesto que x y y no son amigos, se tiene que $\mathcal{F}_x \neq \mathcal{F}_y$. De aquí se concluye que existe $F \in \mathcal{F}_x \cup \mathcal{F}_y$ tal que $|F \cap \{x, y\}| = 1$. Por lo tanto, la familia $\mathcal{F}_n$ separa los puntos de X_n en el sentido T_0. Por la Proposición 1.4.7 y la Afirmación 3 en el Teorema 1.3.26, concluimos que $nw(X_n) = \omega$.
Finalmente, $nw(X) = nw(\bigcup_{n<\omega} X_n) = \omega$. ■

Corolario 1.4.20. Si un espacio compacto es hereditariamente Lindelöf Σ, entonces es metrizable.

Capítulo 2

La propiedad Lindelöf Σ en espacios de funciones

El propósito de este capítulo es presentar un estudio de la propiedad Lindelöf Σ en espacios de funciones con la topología de convergencia puntual.

El capítulo consta de cuatro seccióones. En la sección 1 presentamos la relación de t-equivalencia y algunas propiedades t-invariantes. El teorema principal de esta sección es un resultado de Okunev que establece que la σ-compacidad, la K-analiticidad y la propiedad Lindelöf Σ son t-invariantes.

En la segunda sección se demostrará que todo espacio metalindelöf con extent numerable es Lindelöf. Se presenta una demostración completa del teorema de Baturov sobre la relación entre el extent y el número de Lindelöfnúmero de Lindelöf de cualquier subespacio de $C_p(X)$ cuando X es un espacio Lindelöf Σ. También se verá el teorema de Reznichenko sobre la normalidad colectiva en espacios $C_p(X)$.

La sección 3 contiene un teorema de Uspenkij sobre el marco Lindelöf Σ del espacio $C_p(X)$ cuando X es Lindelöf Σ. El resultado principal de esta sección es un teorema de Okunev que establece la condición Lindelöf Σ para $C_p(Y)$ si X y $Y \subseteq C_p(X)$ son espacios Lindelöf Σ. Concluimos la sección con dos teoremas de Tkachuk sobre la propiedad Lindelöf Σ de espacios de funciones iterados.

La parte final de este capítulo es la sección 4 cuyo resultado principal es un famoso ejemplo de Reznichenko de un espacio compacto de Talagrand que es una unión numerable de espacios compactos de Eberlein sin ser compacto de Eberlein; dicho espacio es canónicamente homeomorfo a la compactificación de Stone-Čech del complemento pseudocompacto de uno de sus puntos. Como un resultado auxiliar se presenta un teorema de Talagrand sobre la K-analiticidad del espacio $C_p(X)$ para un espacio compacto X.

2.1. La propiedad Lindelöf Σ es t-invariante

Comenzaremos este capítulo presentando la relación de t-equivalencia y algunas propiedades t-invariantes. El teorema principal de esta sección es un resultado de Okunev que establece que la σ-compacidad, la K-analiticidad y la propiedad Lindelöf Σ son t-invariantes.

Definición 2.1.1. Dados espacios X y Y, diremos que son t-equivalentes si $C_p(Y)$ es homeomorfo a $C_p(X)$.

Definición 2.1.2. Una propiedad $\mathcal{P}$ (respectivamente, un invariante cardinal φ) se llama t-invariante si para cualquier par de espacios t-equivalentes X y Y, el espacio X tiene la propiedad $\mathcal{P}$ si y sólo si Y tiene la propiedad $\mathcal{P}$ (respectivamente, $\varphi(X) = \varphi(Y)$).

Proposición 2.1.3. Si X y Y son homeomorfos, entonces son t-equivalentes.

Demostración. Dado un homeomorfismo $r : X \to Y$, definimos el mapeo dual $r^* : C_p(Y) \to C_p(X)$ por $r^*(f) = f \circ r$ para cada $f \in C_p(Y)$. Por [Tk7, Problem 163] el mapeo r^* es un homeomorfismo. ■

Un teorema de Gul'ko y T.E. Khmyleva nos dice que los espacios $[0, 1]$ y $\mathbb{R}$ son t-equivalentes [GK], lo que demuestra que la relación de t-equivalencia no preserva la compacidad; sin embargo la σ-compacidad sí es t-invariante como veremos más adelante.

Proposición 2.2.4. Supongamos que X y Y son t-equivalentes y κ es un cardinal infinito. Entonces:
(a) $|X| = |Y|$;
(b) $nw(X) = nw(Y)$;
(c) $sup\{l(X^n) : n \in \mathbb{N}\} = sup\{l(Y^n) : n \in \mathbb{N}\}$;
(d) X es κ-monolítico si y sólo si Y es κ-monolítico;
(e) X es κ-estable si y sólo si Y es κ-estable;
(f) $iw(X) = iw(Y)$;
(g) $d(X) = d(Y)$.

Demostración. **(a)** $|X| = w(C_p(X)) = w(C_p(Y)) = |Y|$ [Tk7, Problem 169].
(b) $nw(X) = nw(C_p(X)) = nw(C_p(Y)) = nw(Y)$ [Tk7, Problem 172].
(c) $sup\{l(X^n) : n \in \mathbb{N}\} = t(C_p(X)) = t(C_p(Y)) = sup\{l(Y^n) : n \in \mathbb{N}\}$ [Tk7, Problem 149].
(d) El espacio X es κ-monolítico si y sólo si $C_p(X)$ es κ-estable [Ar4, Theorem II.6.9]. Por lo tanto X es κ-monolítico si y sólo si Y es κ-monolítico.
(e) El espacio X es κ-estable si y sólo si $C_p(X)$ es κ-monolítico [Ar4, Theorem II.6.8]. Por consiguiente X es κ-estable si y sólo si Y es κ-estable.
(f) $iw(X) = d(C_p(X)) = d(C_p(Y)) = iw(Y)$ [Tk7, Problem 174].
(g) $d(X) = iw(C_p(X)) = iw(C_p(Y)) = d(Y)$ [Tk7, Problem 173]. ■

Definición 2.1.5. Dada una familia de espacios $\{X_t : t \in T\}$ definimos su unión libre como el espacio $\bigoplus_{t \in T} X_t = \bigcup\{X_t \times \{t\} : t \in T\}$ con la topología generada por la familia $\{U \times \{t\} : t \in T,\ U \in \tau(X_t)\}$ como subbase.

Definición 2.1.6. Diremos que un espacio X es K-analítico si existe un mapeo USCO $p : \omega^\omega \to X$.

Del Teorema 1.1.16 se sigue que todo espacio K-analítico es Lindelöf Σ.

Proposición 2.1.7. **(a)** Si X es K-analítico y existe una función continua y sobreyectiva $f : X \to Y$, entonces Y es K-analítico.
(b) Si $F \subseteq X$ es un conjunto cerrado y X es K-analítico, entonces F es K-analítico.
(c) Si X y Y son espacios K-analíticos, entonces $X \times Y$ es K-analítico.
(d) Si $\{X_n : n < \omega\}$ es una familia de espacios K-analíticos, entonces $\bigoplus_{n<\omega} X_n$ es un espacio K-analítico.

Demostración. **(a)** Sea $p : \omega^\omega \to X$ un mapeo USCO. Consideremos el mapeo multivaluado $q : \omega^\omega \to Y$ definido por $q(u) = f(p(u))$ para cada $u \in \omega^\omega$. Es claro que q es sobreyectivo, compacto-valuado y superiormente semicontinuo.

(b) Sea $p : \omega^\omega \to X$ un mapeo USCO. Consideremos el mapeo multivaluado $q : \omega^\omega \to F$ definido por $q(f) = p(f) \cap F$ para cada $f \in \omega^\omega$. Es claro que q es sobreyectivo y compacto-valuado. Tomemos $U \in \tau(F)$ y $V \in \tau(X)$ tal que $U = V \cap F$. Entonces

$$\begin{aligned} q^{-1}(U) &= \{f \in \omega^\omega : q(f) \subseteq U\} = \{f \in \omega^\omega : p(f) \cap F \subseteq V \cap F\} \\ &= \{f \in \omega^\omega : p(f) \subseteq U \cup (X \backslash F)\} = p^{-1}(U \cup (X \backslash F)) \end{aligned}$$

el cual es un abierto en ω^ω. Por lo tanto $q : \omega^\omega \to F$ es un mapeo USCO.

(c) Sean $p : \omega^\omega \to X$ y $q : \omega^\omega \to Y$ mapeos USCO. Consideremos el mapeo multivaluado $r : \omega^\omega \to X \times Y$ definido por $r(f) = p(f) \times q(f)$ para cada $f \in \omega^\omega$. Es claro que q es sobreyectivo y compacto-valuado. Tomemos $U \in \tau(X)$ y $V \in \tau(Y)$. Entonces

$$\begin{aligned} r^{-1}(U \times V) &= \{f \in \omega^\omega : r(f) \subseteq U \times V\} = \{f \in \omega^\omega : p(f) \subseteq U \text{ y } q(f) \subseteq V\} \\ &= p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V) \end{aligned}$$

el cual es un abierto en ω^ω. Por lo tanto $r : \omega^\omega \to X \times Y$ es un mapeo USCO.

(d) Es un teorema clásico de Baire que ω^ω es homeomorfo al espacio de los números irracionales $\mathbb{P}$ [Wi, Problem 24K].
Si $\{\mathbb{P}_n : n < \omega\}$ es una numeración de la familia $\{(z, z+1) \cap \mathbb{P} : z \in \mathbb{Z}\}$, es claro que $\mathbb{P} = \bigoplus_{n<\omega} \mathbb{P}_n$ y $\mathbb{P}$ es homeomorfo a $\mathbb{P}_n$ para cada $n < \omega$. Identificando a $\mathbb{P}_n$ con ω^ω, sin pérdida de generalidad podemos considerar un mapeo USCO $p_n : \mathbb{P}_n \to X_n$ para todo $n < \omega$. Definamos al mapeo multivaluado $p : \mathbb{P} \to \bigoplus_{n<\omega} X_n$ por $p(t) = p_n(t)$ si $t \in \mathbb{P}_n$. Es claro que $p : \mathbb{P} \to \bigoplus_{n<\omega} X_n$ es compacto-valuado, sobreyectivo y superiormente semicontinuo. Por lo tanto $\bigoplus_{n<\omega} X_n$ es K-analítico. ■

Definición 2.1.8. Dado un espacio X, definimos a $\mathcal{K}(X)$ como la mínima clase que contiene a X, a todos los espacios compactos y además es invariante bajo productos finitos, uniones libres de familias numerables, subespacios cerrados e imagenes continuas.

Proposición 2.1.9. **(1)** Si un espacio X es Lindelöf Σ, entonces cada elemento de la clase $\mathcal{K}(X)$ es Lindelöf Σ.
(2) Si un espacio X es σ-compacto, entonces cada elemento de la clase $\mathcal{K}(X)$ es σ-compacto.
(3) Si un espacio X es K-analítico, entonces cada elemento de la clase $\mathcal{K}(X)$ es K-analítico.

Demostración. Notemos que la clase $\mathcal{L}$ que consta de los espacios Lindelöf Σ (respectivamente, σ-compactos ó K-analíticos) satisface las siguientes condiciones:
(a) $X \in \mathcal{L}$;
(b) $K \in \mathcal{L}$ para cada espacio compacto K;
(c) $Y \times Z \in \mathcal{L}$ para cualesquier $Y, Z \in \mathcal{L}$ (proposiciones 1.1.7 y 2.1.7);
(d) Si $\{X_n : n < \omega\} \subseteq \mathcal{L}$, entonces $\bigoplus_{n<\omega} X_n \in \mathcal{L}$ (proposiciones 1.1.19 y 2.1.7);
(e) Si $Y \in \mathcal{L}$ y F es un subconjunto cerrado de Y, entonces $F \in \mathcal{L}$ (proposiciones 1.1.7 y 2.1.7);

(f) Si Z es una imagen continua de $Y \in \mathcal{L}$, entonces $Z \in \mathcal{L}$ (proposiciones 1.1.7 y 2.1.7.).
Puesto que $\mathcal{K}(X)$ es la mínima clase de espacios que satisface las condiciones (a)-(f), se sigue que $\mathcal{K}(X) \subseteq \mathcal{L}$. ■

Definición 2.1.10. Diremos que una familia $F \subseteq C_p(X, [-1, 1])$ es D-separadora si contiene a la función identicamente cero 0_X y para cualquier subespacio cerrado $P \subseteq X$, si $\varepsilon > 0$ y $E \subseteq X \backslash P$ es conjunto finito, entonces existe una función $f \in F$ tal que $f(E) \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$ y $f(P) \subseteq [-1, -\frac{3}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1]$.

Proposición 2.1.11. $C_p(X, [-1, 1])$ es una familia D-separadora para todo espacio X.

Demostración. Supongamos que $P \subseteq X$ es un conjunto cerrado, $E \in [X \backslash P]^{<\omega}$ y $\varepsilon > 0$. Por regularidad, para cada $x \in E$ existe una función continua $f_x : X \to [0, 1]$ tal que $f_x(x) = 0$ y $f_x(P) \subseteq \{1\}$. Para la función $f = \prod_{x \in E} f_x : X \to [0, 1]$ tenemos que $f(E) \subseteq \{0\}$ y $f(P) \subseteq \{1\}$, por lo cual la familia $C_p(Y, [-1, 1])$ es D-separadora. ■

Definición 2.1.12. Dado un espacio X y un conjunto $F \subseteq C_p(X, [-1, 1])$ que contiene a 0_X, denotamos por $Z_F(X)$ al espacio que consiste de todas las funciones $\varphi : F \to [-1, 1]$ para las cuales $\varphi(0_X) = 0$ y existe una vecindad $V \in \tau(0_X, F)$ tal que $\varphi(V) \subseteq [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Proposición 2.1.13. Si $F \subseteq C_p(X, [-1, 1])$ es una familia D-separadora, entonces X es homeomorfo a un subespacio cerrado de $Z_F(X)$.

Demostración. Consideremos el mapeo evaluación $E^F : X \to C_p(F)$ definido por $E^F(x)(f) = f(x)$ para cada $x \in X$ y $f \in F$. Como F es una familia D-separadora, separa los puntos y los conjuntos cerrados de X, esto es, para cada $x \in X$ y cualquier conjunto cerrado $G \subseteq X$ tal que $x \notin G$, tenemos que $f(x) \notin \overline{f(G)}$ para algún $f \in F$. Entonces la función $E^F : X \to E^F(X)$ es un homeomorfismo [Tk7, Problem 166].
Puesto que $f(X) \subseteq [-1, 1]$ para cada $f \in F$, tenemos que $E^F(X) \subseteq [-1, 1]^F$. Además, $E^F(x)(0_X) = 0_X(x) = 0$ y $E^F(x) \in C_p(F, [-1, 1])$ para todo $x \in X$; esto implica que $E^F(X) \subseteq Z_F(X)$. Resta demostrar que $E^F(X)$ es cerrado en $Z_F(X)$.
Dado $\varphi \in Z_F(X) \backslash E^F(X)$, podemos encontrar un conjunto finito $G \subseteq X$ y $\varepsilon > 0$ tales que si $f \in F$ y $f(G) \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$, entonces $\varphi(f) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Puesto que φ es distinto de $E^F(x)$ para cada $x \in G$, podemos escoger $V_x \in \tau(E^F(x), Z_F(X))$ tal que $\varphi \notin \overline{V_x}$ y $E^F(U_x) \subseteq V_x$ para algún $U_x \in \tau(x, X)$. El conjunto $U = \bigcup_{x \in G} U_x$ es una vecindad de G y $\varphi \notin \bigcup_{x \in G} \overline{V_x} \supseteq \bigcup_{x \in G} \overline{E^F(U_x)} = \overline{E^F(U)}$. Como F es una familia D-separadora, existe $g \in F$ tal que $g(G) \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$ y $g(X \backslash U) \subseteq [-1, -\frac{3}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1]$. Tenemos que $\varphi(g) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ y $E^F(x)(g) = g(x) \in [-1, -\frac{3}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1]$ para cada $x \in X \backslash U$, por lo que el conjunto $\{\upsilon \in Z_F(X) : \upsilon(g) \in (-\frac{3}{4}, \frac{3}{4})\}$ es una vecindad abierta de φ que no intersecta a $E^F(X \backslash U)$, por lo cual $\varphi \notin \overline{E^F(X \backslash U)}$. Finalmente, $\varphi \notin \overline{E^F(U)} \cup \overline{E^F(X \backslash U)} = \overline{E^F(X)}$, lo que demuestra que $E^F(X) = \overline{E^F(X)}$. ■

Proposición 2.1.14. Dado un espacio X, un conjunto $Y \subseteq X$ y $p \in Y$, el conjunto $\mathcal{F}(p, Y) = \{f \in [-1, 1]^Y : f(p) = 0 \text{ y } f(U) \subseteq [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \text{ para algún } U \in \tau(p, Y)\}$ es una imagen continua de $\mathcal{F}(p, X) = \{f \in [-1, 1]^X : f(p) = 0 \text{ y } f(U) \subseteq [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \text{ para algún } U \in \tau(p, X)\}$.

Demostración. Consideremos al mapeo restricción $r : [-1, 1]^X \to [-1, 1]^Y$ definido por $r(f) = f|_Y$ para cada $f \in [-1, 1]^X$. Es claro que r es un mapeo continuo, por lo que basta demostrar que $h = r|_{\mathcal{F}(p,X)} : \mathcal{F}(p, X) \to \mathcal{F}(p, Y)$ es sobreyectivo. Sea $g \in \mathcal{F}(p, Y)$ y tomemos $V \in \tau(p, Y)$ tal que $g(V) \subseteq [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Existe $U \in \tau(X)$ tal que $U \cap Y = V$; definamos $f(x) = g(x)$ para cada $x \in Y$ y $f(x) = 0$ para todo $x \in X \backslash Y$. Claramente $f|_Y = g$ y

$f(U) \subseteq [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, por lo que $f \in \mathcal{F}(p, X)$. ∎

Proposición 2.1.15. Dados conjuntos $F \subseteq C_p(X, [-1,1])$ y $G \subseteq C_p(Y, [-1,1])$ tales que $0_X \in F$ y $0_Y \in G$; supongamos que G puede mapearse homeomórficamente en un subconjunto de F de tal forma que la función 0_Y es mapeada en 0_X. Entonces $Z_G(Y)$ es una imagen continua de $Z_F(X)$.

Demostración. Sea $h : G \to G' \subseteq F$ un homeomorfismo tal que $h(0_Y) = 0_X$. Por la Proposición 2.1.14, el conjunto $\mathcal{F}(0_X, G')$ es una imagen continua de $\mathcal{F}(0_X, F)$. Es claro que el mapeo dual $h^* : \mathcal{F}(0_X, G') \to \mathcal{F}(0_Y, G)$ definido por $h^*(\varphi) = \varphi \circ h$ para cada $\varphi \in \mathcal{F}(0_X, G')$, es continuo y sobreyectivo. Por lo tanto, $Z_G(Y) = \mathcal{F}(0_Y, G)$ es una imagen continua de $Z_F(X) = \mathcal{F}(0_X, F)$. ∎

Proposición 2.1.16. Para cada familia $F \subseteq C_p(X, [-1,1])$ que contenga a la función 0_X, el espacio $Z_F(X)$ está en la clase $\mathcal{K}(X)$.

Demostración. Para cualquier $E \in [X]^{<\omega} \backslash \{\emptyset\}$, consideremos al conjunto $B(E) = \{\varphi \in [-1,1]^F : \varphi(0_X) = 0$ y $|\varphi(f)| \leq \frac{1}{2}$ para cada $f \in F$ tal que $f(E) \subseteq (-\frac{1}{|E|}, \frac{1}{|E|})\}$.

Afirmación. Si Y es un espacio y $A_n \subseteq Y$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es una imagen continua de $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Definamos $i : \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ por $i(x,n) = x$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x \in A_n$. Si $U \in \tau(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$, entonces

$$\begin{aligned} i^{-1}(U) &= \{(x,n) : n \in \mathbb{N} \text{ y } y \in U \cap A_n\} \\ &= \textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{(x,n) : x \in A_n \cap U\} \\ &= \textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} ((U \cap A_n) \times \{n\}) \end{aligned}$$

así que el conjunto $i^{-1}(U)$, por definición es abierto en $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$. □

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos al conjunto $B_n = \bigcup\{B(E) : E \in [X]^n\}$. Por la Afirmación anterior, $Z_F(X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ es una imagen continua de $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} B_n$ y como $\mathcal{K}(X)$ es invariante bajo uniones libres de familias numerables, basta demostrar que $B_n \in \mathcal{K}(X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Dado $n \in \mathbb{N}$, el conjunto B_n es una imagen continua de

$$P_n = \{((x_1, \ldots, x_n), \varphi) \in X^n \times [-1,1]^F : \varphi \in B(\{x_1, \ldots, x_n\})\}$$

bajo el mapeo proyección $\pi : X^n \times [-1,1]^F \to [-1,1]^F$. El conjunto $X^n \times [-1,1]^F$ esta en $\mathcal{K}(X)$ puesto que $[-1,1]^F$ es compacto. Para ver que $B_n \in \mathcal{K}(X)$, basta demostrar que P_n es cerrado en $X^n \times [-1,1]^F$.

Si $((a_0, \ldots, a_n), \varphi) \in (X^n \times [-1,1]^F) \backslash P_n$, entonces $\varphi \notin B(\{a_0, \ldots, a_n\})$, por lo que existe $f_0 \in F$ tal que $f_0(\{a_0, \ldots, a_n\}) \subseteq (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ pero $|\varphi(f_0)| > \frac{1}{2}$. Puesto que la función f_0 es continua, el conjunto

$$W = \{((b_1, \ldots, b_n), \xi) \in X^n \times [-1,1]^F : b_1, \ldots, b_n \in f_0^{-1}((-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n})) \text{ y } |\xi(f_0)| > \tfrac{1}{2}\}$$

es abierto en $X^n \times [-1,1]^F$; además $((a_1, \ldots, a_n), \varphi) \in W$ y $W \cap P_n = \emptyset$. Por lo tanto, P_n es cerrado en $X^n \times [-1,1]^F$. ∎

Proposición 2.1.17. Si una familia D-separadora $G \subseteq C_p(Y)$ es homeomorfa a un subconjunto de $C_p(X)$, entonces Y está en la clase $\mathcal{K}(X)$.

Demostración. Podemos encontrar un homeomorfismo que encaje a G en $C_p(X)$ de tal forma que 0_Y es mapeado en 0_X [Tk7, Problem 79].

La función $w = \frac{2}{\pi}(tan^{-1}) : \mathbb{R} \to (-1,1)$ es un homeomorfismo y en consecuencia el mapeo $h_w : C_p(X) \to C_p(X, (-1,1))$, definido por $h_w(f) = w \circ f$ para cada $f \in C_p(X)$, es un homeomorfismo [Tk7, Problem 91]. Además $h_w(0_X) = 0_X$, por lo que G es una familia D-separadora que es homeomorfa a un conjunto $F \subseteq C_p(X, [-1,1])$ de tal forma que 0_Y es mapeado en 0_X.

Por las proposiciones 2.1.15 y 2.1.16, el espacio $Z_G(Y)$ es una imagen continua de $Z_F(X)$ y $Z_F(X) \in \mathcal{K}(X)$, por lo cual $Z_G(Y) \in \mathcal{K}(X)$. Por la Proposición 2.1.6, el espacio Y es homeomorfo a un subconjunto cerrado de $Z_G(Y)$, y en consecuencia $Y \in \mathcal{K}(X)$. ■

Teorema 2.1.18. Dados espacios X y Y, si $C_p(Y)$ es homeomorfo a un subespacio de $C_p(X)$, entonces $Y \in \mathcal{K}(X)$.

Demostración. La familia $C_p(Y, [-1, 1]) \subseteq C_p(Y)$ es D-separadora por la Proposición 2.1.11; por la Proposición 2.1.17, el espacio Y está en la clase $\mathcal{K}(X)$. ■

Teorema 2.1.19. **(1)** Si X es Lindelöf Σ y $C_p(Y)$ es homeomorfo a un subconjunto de $C_p(X)$, entonces Y es Lindelöf Σ.
(2) Si X es σ-compacto y $C_p(Y)$ es homeomorfo a un subconjunto de $C_p(X)$, entonces Y es σ-compacto.
(3) Si X es K-analítico y $C_p(Y)$ es homeomorfo a un subconjunto de $C_p(X)$, entonces Y es K-analítico.

Demostración. Si X es Lindelöf Σ (respectivamente, σ-compacto ó K-analítico), el espacio Y pertenece a $\mathcal{K}(X)$ por el Teorema 2.1.18, así que podemos aplicar la Proposición 2.1.9 para ver que Y es Lindelöf Σ (respectivamente, σ-compacto ó K-analítico). ■

Teorema 2.1.20. **(1)** Si X es Lindelöf Σ y Y es t-equivalente a X, entonces Y es Lindelöf Σ.
(2) Si X es σ-compacto y Y es t-equivalente a X, entonces Y es σ-compacto.
(3) Si X es K-analítico y Y es t-equivalente a X, entonces Y es K-analítico.

Demostración. Basta aplicar el Teorema 2.1.19. ■

2.2. Extent en espacios $C_p(X)$ y sus subespacios

En esta sección se demostrará que todo espacio metalindelöf con extent numerable es Lindelöf. Además, presentamos una demostración completa del teorema de Baturov sobre la relación entre el extent y el número de Lindelöfnúmero de Lindelöf de cualquier subespacio de $C_p(X)$ cuando X es un espacio Lindelöf Σ. También se verá el teorema de Reznichenko sobre la normalidad colectiva en espacios $C_p(X)$.

Definición 2.2.1. Definimos el *extent* de un espacio X como el cardinal $ext(X) = sup\{|D| : D \subseteq X \text{ es cerrado y discreto}\}$.

Proposición 2.2.2. Para cualesquiera espacios X y Y:
(a) $ext(X) \leq l(X)$;
(b) Si $f : X \to Y$ es una función continua y sobreyectiva, entonces $ext(Y) \leq ext(X)$.

Demostración. **(a)** Si $D \subseteq X$ es un subespacio discreto y cerrado, entonces $|D| \leq l(D)$ por ser discreto y $l(D) \leq l(X)$ por ser cerrado en X [En, Theorem 3.8.4].

(b) Supongamos que D es cerrado y discreto en Y; escojamos $x_y \in f^{-1}(y)$ para cada $y \in D$. Si existe un punto de acumulación $x \in X$ para $F = \{x_y : y \in D\}$, entonces por continuidad se tiene que $f(x) \in f(\overline{F\backslash\{x\}}) \subseteq \overline{f(F\backslash\{x\})} = \overline{D\backslash\{f(x)\}}$ [Tk7, Problem 9], lo que implica que $f(x)$ es un punto de acumulación para D contradiciendo el hecho de que D sea cerrado y discreto. Por lo tanto F es cerrado y discreto, y en consecuencia $|D| = |F| \leq ext(X)$. ■

Ejemplo 2.2.3. Supongamos que X es el ordinal ω_1 con la topología generada por los intervalos $\{[0, \alpha) : \alpha < \omega_1\} \cup \{(\alpha, \omega_1) : \alpha < \omega_1\}$ como subbase. Entonces X es numerablemente compacto [Tk7, Problem 314] y en consecuencia $ext(X) = \omega$ [Tk7, Problem 132]. La familia $\{[0, \alpha + 1) : \alpha < \omega_1\}$ es una cubierta abierta de X que no tiene subcubierta numerable, por lo que $l(X) > \omega = ext(X)$.

Si X es un conjunto y $\mathcal{A} \subseteq exp(X)$ es una cubierta de X, diremos que $\mathcal{B} \subseteq ext(X)$ es un refinamiento de $\mathcal{A}$, si $\mathcal{B}$ es una cubierta de X y para cada $B \in \mathcal{B}$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $B \subseteq A$.

Definición 2.2.4. Diremos que un espacio X es metalindelöf si toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto punto-numerable.

Teorema 2.2.5. Si X es un espacio metalindelöf, entonces $ext(X) = l(X)$.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X que no tiene subcubiertas abiertas de cardinalidad igual o menor que $\kappa = ext(X)$ y por tanto no posee refinamientos abiertos de cardinalidad igual o menor que κ. Fijemos un refinamiento punto-numerabable $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$. Escojamos $x_0 \in X$ arbitrario y hagamos $\mathcal{V}_0 = \{V \in \mathcal{V} : x_0 \in V\}$. Entonces $\mathcal{V}_0$ es numerable pues $\mathcal{V}$ es punto-numerable. Supongamos que $\beta < \kappa^+$ y hemos escogido un conjunto $\{x_\alpha : \alpha < \beta\} \subseteq X$ y una familia de abiertos $\{\mathcal{V}_\alpha : \alpha < \beta\}$ que satisfacen las siguientes condiciones para cada $\alpha < \beta$:

(1) $\mathcal{V}_\alpha = \{V \in \mathcal{V} : x_\alpha \in V\}$;
(2) $x_\alpha \notin \bigcup\{\bigcup \mathcal{V}_\gamma : \gamma < \alpha\}$.

Puesto que $\mathcal{V}$ es punto-numerable, cada $\mathcal{V}_\alpha$ es numerable; como κ^+ es un cardinal regular [Ku, Lemma 10.37], el conjunto $\mathcal{V}_\alpha^* = \bigcup\{\mathcal{V}_\alpha : \alpha < \beta\}$ tiene cardinalidad a lo más κ. Entonces $\bigcup \mathcal{V}_\alpha^* \neq X$ y por tanto podemos encontrar un punto $x_\beta \in X \backslash \bigcup \mathcal{V}_\alpha^*$. Haciendo $\mathcal{V}_\beta = \{V \in \mathcal{V} : x_\beta \in V\}$ notamos que las condiciones (1)-(2) se satisfacen para β de modo

que nuestra construcción inductiva nos da un conjunto $D = \{x_\alpha : \alpha < \kappa^+\} \subseteq X$ y familias $\{\mathcal{V}_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ con las propiedades (1)-(2).
Observemos primero que se sigue de las condiciones (1) y (2) que $\alpha < \beta$ implica que $x_\alpha \neq x_\beta$ y por lo tanto $|D| = \kappa^+$ así que, para obtener una contradicción, basta probar que D es cerrado y discreto. Para hacerlo tomemos cualquier punto $x \in X$. Entonces $x \in V$ para algún $V \in \mathcal{V}$; si $x_\alpha \in V$, entonces $V \in \mathcal{V}_\alpha$ y en consecuencia, por (2), se cumple que $x_\beta \notin V$ para cada $\beta \neq \alpha$. Por lo tanto x tiene una vecindad cuya intersección con D contiene a lo más un punto. ■

Comentario 2.2.6. Dow, Junnila y Pelant demostraron que existe un espacio compacto K tal que $C_p(K)$ no es metalindelöf [DJP]; sin embargo, más adelante veremos que en este caso la igualdad $ext(C_p(K)) = l(C_p(K))$ aún se conserva.

Definición 2.2.7. Dado un espacio X, una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X es discreta si para cada $x \in X$ existe $U \in \tau(x, X)$ tal que $|\{A \in \mathcal{A} : A \cap U \neq \emptyset\}| \leq 1$. El espacio X se llamará colectivamente normal si para cada familia discreta $\mathcal{F}$ de subconjuntos cerrados de X existe una familia discreta $\{U_F : F \in \mathcal{F}\}$ tal que $U_F \in \tau(F, X)$ para todo $F \in \mathcal{F}$.

Ejemplo 2.2.8. Consideremos a los espacios D y $X = [0,1]^\kappa$ donde D es el espacio discreto de cardinalidad ω_1 y $\kappa = w(\beta D)$. Entonces por [Tk7, Problem 209], tenemos que $D \subseteq M = \beta D \subseteq X$. La familia $\tau_M = \{U \cup A : U \in \tau(X) \text{ y } A \subseteq X \backslash M\}$ es una topología en X. Denotaremos al espacio (X, τ_M) por X_M; entonces X_M es normal pero no colectivamente normal [Tk7, Problem 293].

Proposición 2.2.9. Si X es un espacio normal con extent numerable, entonces es colectivamente normal.

Demostración. *Afirmación.* Si $\mathcal{R}$ es una familia discreta de subconjuntos cerrados de un espacio Z, entonces $\bigcup \mathcal{R}'$ es cerrado para cada $\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R}$.

Basta demostrar que $\overline{\bigcup \mathcal{R}'} \subseteq \bigcup \mathcal{R}'$. Si $x \in \overline{\bigcup \mathcal{R}'}$ escojamos $U \in \tau(x, Z)$ que intersecta sólo a un elemento $R \in \mathcal{R}'$. Dado un elemento arbitrario $V \in \tau(x, Z)$, obsérvese que $\emptyset \neq (U \cap V) \cap \bigcup \mathcal{R}' = (U \cap V) \cap R$, por lo cual $x \in \overline{R} = R \subseteq \bigcup \mathcal{R}'$. □

Si $\mathcal{F}$ es una familia discreta de subconjuntos cerrados no vacíos de X, entonces para cada $F \in \mathcal{F}$ existe $U_F \in \tau(F, X)$ tal que la familia $\mathcal{F}' = \{\overline{U_F}\} \cup (\mathcal{F} \backslash \{F\})$ también es discreta. Para comprobar esto, notemos que X es normal así que para cada $F \in \mathcal{F}$ se puede escoger $U_F \in \tau(F, X)$ tal que $\overline{U_F} \cap G = \emptyset$ donde $G = \bigcup(\mathcal{F} \backslash \{F\})$. Dado un punto arbitrario $x \in X$, tomemos $W \in \tau(x, X)$ que intersecta a lo más un elemento de $\mathcal{F}$. Si $x \in \overline{U_F}$, entonces $x \notin G$ así que $X \backslash G$ es una vecindad de x que intersecta a lo más un elemento de $\mathcal{F}'$. Si $x \notin \overline{U_F}$ entonces $W \backslash \overline{U_F}$ es una vecindad abierta de x que intersecta a lo más un elemento de $\mathcal{F}'$.

Escogiendo un punto $x_F \in F$ para cada $F \in \mathcal{F}$, obetenemos un subespacio cerrado y discreto $\{x_F : F \in \mathcal{F}\}$. Puesto que $ext(X) \leq \omega$, la familia $\mathcal{F}$ es numerable por lo que podemos tomar una numeración $\{F_n : n < \omega\}$ de $\mathcal{F}$. Por la observación en el primer parrafo, existe $U_0 \in \tau(F_0, X)$ tal que la familia $\mathcal{F}_0 = \{\overline{U_0}, F_1, F_2, \ldots\}$ es discreta. Supongamos que hemos escogido $U_i \in \tau(F_i, X)$ tal que para cada $i \leq n$ la familia $\mathcal{F}_n = \{\overline{U_0}, \ldots, \overline{U_n}, F_{n+1}, F_{n+2}, \ldots\}$ es discreta. Por la observación del primer parrafo, existe $U_{n+1} \in \tau(F_{n+1}, X)$ tal que la familia $\mathcal{F}_{n+1} = \{\overline{U_0}, \ldots, \overline{U_n}, \overline{U_{n+1}}, F_{n+2}, \ldots\}$ es discreta, por lo que nuestro proceso inductivo puede continuar hasta darnos una familia disjunta $\{U_n : n < \omega\} \subseteq \tau(X)$ tal que $F_n \subseteq U_n$ para cada $n < \omega$. Si $F = \bigcup \mathcal{F}$ y $U = \bigcup_{n<\omega} U_n$, entonces $U \in \tau(F, X)$; por la Afirmación, F es cerrado así que la normalidad de X implica que existe $W \in \tau(F, X)$ tal que $F \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq U$. Es inmediato que $\{U_n \cap W : n < \omega\}$ es una familia discreta y $F_n \subseteq U_n \cap W$ para cada $n < \omega$. ■

Proposición 2.2.10. Si X es un espacio colectivamente normal, entonces $ext(X) \leq c(X)$.

Demostración. Si $F \subseteq X$ es cerrado y discreto, entonces la familia $\{\{x\} : x \in F\}$ es discreta y consta de subconjuntos cerrados. Podemos encontrar una familia discreta $\{U_x : x \in F\}$ tal que $U_x \in \tau(x, X)$ para todo $x \in F$; en particular $\{U_x : x \in F\}$ es una familia disjunta de conjuntos abiertos no vacíos. Por lo tanto $|F| \leq c(X)$. ■

Definición 2.2.11. Diremos que un espacio $P \subseteq [0,1]^A$ es convexo si para cada $f, g \in P$, tenemos la contención $S(f,g) \subseteq P$, donde $S(f,g) = \{sf + (1-s)g : s \in (0,1)\}$. El espacio P se llamará O-convexo si $P \cap S(f,g)$ es denso en $S(f,g)$ para cualesquiera $f, g \in P$.

El siguiente resultado es un famoso teorema de Reznichenko que tiene muchas aplicaciones en C_p-teoría.

Teorema 2.2.12. Supongamos que X es O-convexo y denso en $[0,1]^A$. Si X es normal, entonces $ext(X) = \omega$.

Demostración. Si para algún conjunto B tenemos $H = \{h_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq [0,1]^B$ y una función $t : \omega_1 \times \omega_1 \to (0,1)$, hagamos $H(t) = \{t_{\alpha\beta}h_\alpha + (1-t_{\alpha\beta})h_\beta : \alpha, \beta < \omega_1 \text{ y } \alpha \neq \beta\}$ donde $t_{\alpha\beta} = t(\alpha, \beta)$. Dados $f \in [0,1]^B$, $K \in [B]^{<\omega}$ y $\varepsilon > 0$ consideremos al conjunto

$$O(f, K, \varepsilon) = \{g \in [0,1]^B : |f(x) - g(x)| < \varepsilon \text{ para cada } x \in K\}.$$

Es claro que la familia $\{O(f, K, \varepsilon) : K \in [B]^{<\omega} \text{ y } \varepsilon > 0\}$ forma una base local del espacio $[0,1]^B$ en el punto f. Dado cualquier $C \subseteq B$, el mapeo $\pi_C : [0,1]^B \to [0,1]^C$ es la proyección natural definida por $\pi_C(f) = f|_C$ para cada $f \in [0,1]^B$.

Afirmación 1. Supongamos que $P \subseteq [0,1]^A$. Si $H = \{h_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq P$ y se tiene la igualdad $\overline{H} \cap \overline{H(t)} = \emptyset$ para alguna función $t : \omega_1 \times \omega_1 \to (0,1)$ tal que $H(t) \subseteq P$ (la barra denota la cerradura en P), entonces H es cerrado y discreto en P y $h_\alpha \neq h_\beta$ para cualesquiera ordinales distintos $\alpha, \beta < \omega_1$.

Si $h_\alpha = h_\beta$ para algunos ordinales distintos $\alpha, \beta < \omega_1$, entonces se tiene la igualdad $h_\alpha = t_{\alpha\beta}h_\alpha + (1-t_{\alpha\beta})h_\beta \in H \cap H(t)$, lo cual es una contradicción. Dado $f \in P$ es fácil comprobar que $O(f, K, \varepsilon)$ es convexo para cada $K \in [A]^{<\omega}$ y $\varepsilon > 0$. Supongamos que f es un punto de acumulación de H; si $U \in \tau(f, P)$, existen $K \in [A]^{<\omega}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $O(f, K, \varepsilon) \cap P \subseteq U$. Puesto que f es un punto de acumulación para H, existen ordinales distintos $\alpha, \beta < \omega_1$ tales que $h_\alpha, h_\beta \in O(f, K, \varepsilon)$. Por convexidad, se tiene la contención $S(h_\alpha, h_\beta) \subseteq O(f, K, \varepsilon)$; entonces $t_{\alpha\beta}h_\alpha + (1-t_{\alpha\beta})h_\beta \in O(f, K, \varepsilon) \cap H(t) \subseteq U \cap H(t)$, por lo cual $f \in \overline{H} \cap \overline{H(t)}$ lo que es una contradicción. De modo que H es discreto y cerrado. □

Afirmación 2. Supongamos que tenemos funciones distintas $f, g \in [0,1]^A$. Si $a, b \in (0,1)$ y $a < b$, entonces el conjunto $\{sf + (1-s)g : s \in (a,b)\}$ es abierto en $S(f,g)$.

Definamos una función $\varphi : [0,1] \to S(f,g)$ por la fórmula $\varphi(s) = sf + (1-s)g$ para todo $s \in [0,1]$. Es claro que φ es un homeomorfismo; como (a,b) es abierto en $[0,1]$, el conjunto $\varphi((a,b))$ es abierto en $S(f,g)$. □

Afirmación 3. Supongamos que $P \subseteq [0,1]^A$ es O-convexo. Si $F \subseteq P$ es discreto y no numerable, entonces existen $H = \{h_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq F$ y una función $t : \omega_1 \times \omega_1 \to (0,1)$ tales que $H(t) \subseteq P$ y $H \cap \overline{H(t)} = \emptyset$.

Para cada $h \in F$ escojamos $K_h \in [A]^{<\omega}$ y $\varepsilon_h \in (0,1)$ tales que $O(h, K_h, \varepsilon_h) \cap F = \{h\}$. Puesto que ω_1 es un cardinal regular y $(0,1) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\frac{1}{n}, 1)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que el conjunto $\{h \in F : \varepsilon_h \geq \frac{1}{n}\}$ es no numerable. Hagamos $\varepsilon = \frac{1}{n}$ y escojamos $H = \{h_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq F$ para el cual se cumple la desigualdad $\varepsilon_{h_\alpha} \geq \varepsilon$ para todo $\alpha < \omega_1$. Puesto que P es O-convexo,

por la Afirmación 2 existe una función $t : \omega_1 \times \omega_1 \to (\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{3})$ tal que $H(t) \subseteq P$. Para demostrar que $H \cap \overline{H(t)} = \emptyset$, basta probar que $W_\alpha = O(h_\alpha, K_{h_\alpha}, \frac{\varepsilon^2}{4})$ no intersecta a $H(t)$ para todo $\alpha < \omega_1$.
Tomemos cualesquiera ordinales distintos $\beta, \gamma < \omega_1$; si $\alpha \neq \gamma$, entonces $h_\gamma \notin O(h_\alpha, K_{h_\alpha}, \varepsilon)$ y por tanto existe $x \in K_{h_\alpha}$ tal que $|h_\alpha(x) - h_\gamma(x)| \geq \varepsilon$. Tenemos que

$$\begin{aligned}|t_{\beta\gamma}h_\beta(x) + (1 - t_{\beta\gamma})h_\gamma(x) - h_\alpha(x)| &= |t_{\beta\gamma}(h_\beta(x) - h_\gamma(x)) + (h_\gamma(x) - h_\alpha(x)| \\ &\geq |h_\alpha(x) - h_\gamma(x)| - t_{\beta\gamma}|h_\beta(x) - h_\gamma(x)| \\ &\geq \varepsilon - \tfrac{\varepsilon}{3}(|h_\beta(x)| + |h_\gamma(x)|) \\ &\geq \varepsilon - 2\tfrac{\varepsilon}{3} = \tfrac{\varepsilon}{3} > \tfrac{\varepsilon^2}{4},\end{aligned}$$

lo que implica que $t_{\beta\gamma}h_\beta + (1 - t_{\beta\gamma})h_\gamma \notin W_\alpha$.
Ahora supongamos que $\gamma = \alpha$; entonces $\beta \neq \alpha$ y $h_\beta \notin O(h_\alpha, K_{h_\alpha}, \varepsilon)$. Por consiguiente existe $y \in K_{h_\alpha}$ para el cual $|h_\alpha(y) - h_\beta(y)| \geq \varepsilon$. Tenemos que

$$|t_{\beta\gamma}h_\beta(y) + (1 - t_{\beta\gamma})h_\gamma(y) - h_\alpha(y)| = |t_{\beta\gamma}(h_\beta(y) - h_\alpha(y))| \geq t_{\beta\gamma} \cdot \varepsilon \geq \tfrac{\varepsilon^2}{4},$$

y por lo tanto $t_{\beta\gamma}h_\beta + (1 - t_{\beta\gamma})h_\gamma \notin W_\alpha$. □

Si F es un subespacio no numerable, discreto y cerrado de X, podemos aplicar la Afirmación 3 para encontrar un conjunto $H' = \{h'_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq F$ y una función $t : \omega_1 \times \omega_1 \to (0, 1)$ tales que $H'(t) \subseteq X$ y $H' \cap \overline{H'(t)} = \emptyset$ (la barra denota la cerradura en X). Puesto que X es normal, existen $U \in \tau(H', X)$ y $V \in \tau(\overline{H'(t)}, X)$ tales que $U \cap V = \emptyset$. Por [Tk7, Fact 3, S.291], podemos encontrar $B \in [A]^{\leq\omega}$ para el cual los conjuntos $P = \pi_B(H')$ y $Q = \pi_B(\overline{H'(t)})$ estan separados en $Y = [0, 1]^B$, esto es $cl_Y(P) \cap Q = P \cap cl_Y(Q) = \emptyset$. Es claro que en un espacio segundo numerable todos los soubconjuntos cerrados son conjuntos G_δ, por lo que $R = cl_Y(Q)$ es un conjunto G_δ. Si fijamos una sucesión $\mathcal{O} = \{O_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \tau(Y)$ tal que $\bigcap \mathcal{O} = R$, entonces $\pi_B(H') \subseteq \bigcup\{Y \backslash O_n : n \in \mathbb{N}\}$. Por la regularidad de ω_1 podemos encontrar un conjunto no numerable $H \subseteq H'$ tal que $\pi_B(H) \cap O_n = \emptyset$ para algún $n \in \mathbb{N}$; es inmediato que $cl_Y(\pi_B(H)) \cap O_n = \emptyset$. Escojamos una numeración $\{h_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de H y una función $s : \omega_1 \times \omega_1 \to (0, 1)$ para las cuales $s_{\alpha\beta} = t_{\gamma\delta}$ si $h_\alpha = h'_\gamma$ y $h_\beta = h'_\delta$; puesto que $cl_Y(Q) \subseteq O_n$ y $H(s) \subseteq H'(t)$, tenemos que $cl_Y(\pi_B(H)) \cap cl_Y(\pi_B(H(s))) = \emptyset$. Si hacemos $f_\alpha = \pi_B(h_\alpha)$ para cada $\alpha < \omega_1$ y $G = \{f_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, entonces $G(s) = \pi_B(H(s))$ y por tanto $cl_Y(G) \cap cl_Y(G(s)) = \emptyset$. Por la Afirmación 1, el conjunto G es cerrado, discreto y no numerable en el espacio Y, lo cual es una contradicción con el hecho de que Y es segundo numerable. ■

Corolario 2.2.13. Supongamos que X es O-convexo y denso en $[0, 1]^A$. Si X es normal, entonces es colectivamente normal.

Demostración. Por el Teorema 2.2.12, el espacio X tiene extent numerable; entonces por la Proposición 2.2.9 es colectivamente normal. ■

Teorema 2.2.14. Si X es un espacio Lindelöf Σ, entonces $ext(Y) = l(Y)$ para todo $Y \subseteq C_p(X)$.

Demostración. *Afirmación 1.* Supongamos que $f : S \to T$ y $g : S \to W$ son mapeos continuos y sobreyectivos. Si $B \subseteq A \subseteq S$ y el conjunto $(f \triangle g)(B)$ es denso en $(f \triangle g)(A)$, entonces $f(B)$ es denso en $f(A)$.

Si $\pi : T \times W \to T$ es la proyección sobre el primer factor, entonces $f = \pi \circ (f \triangle g)$. Por lo tanto $f(A) = \pi \circ (f \triangle g)(A) \subseteq \pi(\overline{(f \triangle g)(B)}) \subseteq \overline{\pi((f \triangle g)(B))} = \overline{f(B)}$. □

Afirmación 2. Si $f : S \to T$ es un mapeo cerrado y sobreyectivo, entonces para cada $x \in S$ y $V \in \tau(f^{-1}(f(x)), S)$, existe $U \in \tau(f(x), T)$ tal que $f^{-1}(U) \subseteq V$.

El conjunto $f(S \backslash V)$ es cerrado y $f(x) \in T \backslash f(S \backslash V)$. Es claro que $U = T \backslash f(S \backslash V)$ es el conjunto prometido. $\square$

Para cualesquier mapeo $f : S \to T$ y número natural n, definamos $f^n : S^n \to T^n$ por $f^n(x) = (f(x_1), \ldots, f(x_n))$ para cada $x = (x_1, \ldots, x_n) \in S^n$. Consideremos una base numerable $\mathcal{O}$ para $\mathbb{R}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ hagamos $\mathcal{O}^n = \{O_1 \times \ldots \times O_n : O_1, \ldots, O_n \in \mathcal{O}\}$. Sea $\{O_k : k \in \mathbb{N}\}$ una numeración de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}^n$ y para todo $k \in \mathbb{N}$ escojamos $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $O_k \in \mathcal{O}^{n_k}$; dado $x \in X^{n_k}$ definamos $[x, O_k] = \{f \in C_p(X) : f^{n_k}(x) \in O_k\}$. Es claro que la familia $\mathcal{B} = \{[x, O_k] : k \in \mathbb{N}$ y $x \in X^{n_k}\}$ es una base de $C_p(X)$.

Por el Teorema 1.1.16, existe un espacio Z y un mapeo perfecto $p : Z \to M$ tales que X es una imagen continua de Z y $w(M) \le \omega$. Puesto que $C_p(X)$ es homeomorfo a un subespacio de $C_p(Z)$ [Tk7, Problem 163], podemos considerar que $Y \subseteq C_p(Z)$, es decir, sin pérdida de generalidad podemos asumir que $X = Z$.

Supongamos que $ext(Y) = \mu < l(Y)$ por lo cual existe $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $Y \subseteq \bigcup\mathcal{U}$ y $Y \setminus \bigcup\mathcal{V} \neq \emptyset$ si $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{\le\mu}$.
Para cada $k \in \mathbb{N}$ consideremos al conjunto $A_k = \{x \in X^{n_k} : [x, O_k] \in \mathcal{U}\}$. Dado que $\mathcal{U}$ es una cubierta de Y, se cumple la siguiente propiedad:

(1) para cada $f \in Y$ existen $k \in \mathbb{N}$ y $x \in A_k$ tales que $f^{n_k}(x) \in O_k$.

Una consecuencia inmediata de que ninguna subfamilia de $\mathcal{U}$ de cardinalidad a lo más μ es una cubierta de Y, es que

(2) Si $B_k \in [A_k]^{\le\mu}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces existe $f \in Y$ tal que $f^{n_k}(B_k) \cap O_k = \emptyset$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Sea $f_0 \in Y$ arbitrario y tomemos $B(k, 0) = \emptyset$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Supongamos que $\beta < \mu^+$ y tenemos conjuntos $\{f_\alpha : \alpha < \beta\} \subseteq Y$ y $\{B(k, \alpha) : k \in \mathbb{N}$ y $\alpha < \beta\}$ que satisfacen las siguientes condiciones para cada $\alpha < \beta$:

(3) $B(k, \alpha) \in [A_k]^{\le\mu}$ para todo $k \in \mathbb{N}$,

(4) $B(k, \gamma) \subseteq B(k, \alpha)$ para cualesquiera $k \in \mathbb{N}$ y $\gamma < \alpha$,

(5) para cada $H \in [\{f_\gamma : \gamma < \alpha\}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y $k \in \mathbb{N}$ el conjunto $\varphi^k_H(B(k, \alpha))$ es denso en $\varphi^k_H(A_k)$ donde $\varphi^k_H = \triangle(\{p^{n_k}\} \cup \{f^{n_k} : f \in H\}) : X^{n_k} \to M^{n_k} \times \mathbb{R}^{|H|\cdot n_k}$

(6) $f^{n_k}_\alpha(B(k, \alpha)) \cap O_k = \emptyset$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Dados $k \in \mathbb{N}$ y $H \in [\{f_\alpha : \alpha < \beta\}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$, hagamos $\varphi^k_H = \triangle(\{p^{n_k}\} \cup \{f^{n_k} : f \in H\})$; puesto que $\varphi^k_H(A_k) \subseteq M^{n_k} \times \mathbb{R}^{|H|\cdot n_k}$ es separable, existe $B(H, k) \in [A_k]^{\le\omega}$ tal que $\varphi^k_H(B(H, k))$ es denso en $\varphi^k_H(A_k)$.
Sea $B(k, \beta) = \bigcup\{B(k, \alpha) : \alpha < \beta\} \cup \bigcup\{B(H, k) : H \in [\{f_\alpha : \alpha < \beta\}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}\}$. Es claro que $|B(k, \beta)| \le \mu$; por la propiedad (2) existe $f_\beta \in Y$ tal que $f^{n_k}_\beta(B(k, \beta)) \cap O_k = \emptyset$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Es fácil ver que para $\{f_\alpha : \alpha \le \beta\}$ y $\{B(k, \alpha) : k \in \mathbb{N}$ y $\alpha \le \beta\}$ se cumplen (3)-(6).
Por inducción obtenemos los conjuntos $D = \{f_\alpha : \alpha < \mu^+\}$ y $\{B(k, \alpha) : k \in \mathbb{N}$ y $\alpha < \mu^+\}$ que satisfacen (3)-(6).

Veamos que $|D| = \mu^+$. Sean $\beta < \alpha < \mu^+$; por (5) y la Afirmación 1, el conjunto $f^{n_k}_\beta(B(k, \alpha))$ es denso en $f^{n_k}_\beta(A_k)$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por (1), existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_k}_\beta(A_k) \cap O_k \neq \emptyset$, y en consecuencia $f^{n_k}_\beta(B(k, \alpha)) \cap O_k \neq \emptyset$. Por otro lado, por (6), tenemos que los conjuntos $f^{n_k}_\alpha(B(k, \alpha))$ y O_k tienen intersección vacía. Lo anterior demuestra que $f_\alpha \neq f_\beta$, y por consiguiente $|D| = \mu^+$.
Como $ext(Y) = \mu$, el conjunto D no puede ser cerrado y discreto, por lo que existe un punto de acumulación $g \in Y$ de D. Puesto que X^n es un espacio Lindelöf Σ para cada $n \in \mathbb{N}$, la estrechez de $C_p(X)$ es numerable [Tk7, Problem 149], y por tanto $t(Y) \le \omega$.
Como $g \in \overline{D \setminus \{g\}}$, existe $A \in [D \setminus \{g\}]^{\le\omega}$ tal que $g \in \overline{A} = \overline{A \setminus \{g\}}$, por lo que g también es un punto de acumulación de A; así el ordinal $\alpha = min\{\beta < \mu^+ : g$ es un punto de acumulación para $\{f_\gamma : \gamma < \beta\}\}$ esta bien definido.

Si $\alpha = \beta + 1$, entonces $g \in \overline{\{f_\gamma : \gamma < \beta + 1\} \backslash \{g\}}$ y en particular $g \in \overline{\{f_\gamma : \gamma < \beta\} \backslash \{g\}}$, lo que contradice la definición de α. Por lo tanto α es un ordinal límite.
Existen $k \in \mathbb{N}$ y $y \in A_k$ tales que $g \in [y, O_k]$; es claro que g es un punto de acumulación de $G = [y, O_k] \cap \{f_\beta : \beta < \alpha\}$. Consideremos a los conjuntos $W = (g^{n_k})^{-1}(O_k)$ y $K = \bigcap_{f \in G} K_f$ donde $K_f = (f^{n_k})^{-1}(f^{n_k}(y))$ para cada $f \in G$.
Si existe $x \in K \backslash W$, entonces $g^{n_k}(x) \notin O_k$ y $g^{n_k}(y) \in O_k$, por lo que $g^{n_k}(x) \neq g^{n_k}(y)$. Por otro lado, $f^{n_k}(x) = f^{n_k}(y)$ para todo $f \in G$. Si $U \in \tau(g^{n_k}(x), \mathbb{R}^{n_k})$ y $V \in \tau(g^{n_k}(y), \mathbb{R}^{n_k})$ son disjuntos, entonces $H = \{h \in Y : h^{n_k}(x) \in U$ y $h^{n_k}(y) \in V\}$ es una vecindad de g que no interseca a G, lo que contradice que $g \in \overline{G}$. Esta contradicción demuestra que $K \subseteq W$.
El conjunto $N = (p^{n_k})^{-1}(p^{n_k}(y))$ es compacto puesto que $p^{n_k} : X^{n_k} \to M^{n_k}$ es un mapeo perfecto [En, Theorem 3.7.9]. Para cada $f \in G$, el conjunto $K_f \cap N$ es un compacto no vacío ya que $y \in K_f \cap N$ y K_f es cerrado. Como $K \cap N = \bigcap_{f \in G} K_f \cap N \subseteq W$, existe un conjunto finito $H \subseteq G$ tal que $Q = \bigcap_{f \in H} K_f \cap N \subseteq W$ [Tk7, Fact 1, S.326]. Si $\varphi_H^k = \triangle(\{p^{n_k}\} \cup \{f^{n_k} : f \in H\})$, entonces φ_H^k es un mapeo perfecto [En, Theorem 3.7.11] y $Q = (\varphi_H^k)^{-1}(\varphi_H^k(y))$. Hagamos $R = \varphi_H^k(X^{n_k})$; por la Afirmación 2 existe $U \in \tau(R)$ tal que $\varphi_H^k(y) \in U$ y $(\varphi_H^k)^{-1}(U) \subseteq W$.
Si $\gamma = max\{\beta : f_\beta \in H\}$, entonces $\gamma + 1 < \alpha$ puesto que α es un ordinal límite; además $H \in [\{f_\delta : \delta < \gamma + 1\}]^{<\omega} \backslash \{\emptyset\}$, así que, por (5), el conjunto $\varphi_H^k(B(k, \gamma + 1))$ es denso en $\varphi_H^k(A_k)$. Como $U \cap \varphi_H^k(A_k)$ es un abierto no vacío de $\varphi_H^k(A_k)$, pues contiene a $\varphi_H^k(y)$, se tiene que $\varphi_H^k(B(k, \gamma + 1)) \cap U \neq \emptyset$. Ecojamos $z \in B(k, \gamma + 1)$ tal que $\varphi_H^k(z) \in U$; entonces $g^{n_k}(z) \in O_k$ puesto que $z \in (\varphi_H^k)^{-1}(U) \subseteq W$. La condición (6) implica que $f_{\gamma+1}^{n_k}(B(k, \gamma + 1)) \cap O_k = \emptyset$. Por otro lado, las condiciones (4) y (6) implican que $f_\beta^{n_k}(B(k, \gamma + 1)) \cap O_k \subseteq f_\beta^{n_k}(B(k, \beta)) \cap O_k = \emptyset$ para cada $\beta \in [\gamma + 1, \alpha)$. Notemos que $g \in [z, O_k]$ pero $[z, O_k] \cap (G \backslash \{f_\beta : \beta < \gamma + 1\}) \subseteq [z, O_k] \cap \{f_\beta : \gamma + 1 < \beta < \alpha\} = \emptyset$, por lo cual $g \notin \overline{G \backslash \{f_\beta : \beta < \gamma + 1\}}$. Como g es un punto de acumulación de G y $g \notin \overline{G \backslash \{f_\beta : \beta < \gamma + 1\}}$, se sigue que g es un punto de acumulación de $\{f_\beta : \beta < \gamma + 1\}$, lo que contradice la elección de α. Esta contradicción muestra que $ext(X) \geq l(X)$. ■

Corolario 2.2.15. Si X es un espacio compacto, entonces $ext(Y) = l(Y)$ para todo $Y \subseteq C_p(X)$.

Teorema 2.2.16. Si X es un espacio Lindelöf Σ, entonces cada conjunto numerablemente compacto $Y \subseteq C_p(X)$ es compacto, monolítico y Fréchet-Urysohn.

Demostración. *Afirmación.* Supongamos que K es un espacio compacto. Si K es monolítico y $t(K) \leq \omega$, entonces es un espacio de Fréchet-Urysohn.

Sean $A \subseteq K$ y $x \in \overline{A}$. Existe $B \in [A]^{\leq \omega}$ tal que $x \in \overline{B}$. Entonces $nw(\overline{B}) \leq \omega$ y como $\overline{B}$ es compacto, es segundo numerable [Tk7, Fact 4, S.307]. Por eso existe una sucesión $S \subseteq B \subseteq A$ que converge a x. □

Como Y es numerablemente compacto, cada subespacio discreto y cerrado de Y es finito, por lo cual $ext(Y) \leq \omega$. Por el Teorema 2.2.1, concluimos que Y es un espacio de Lindelöf y por consiguiente, compacto. Puesto que X^n es un espacio Lindelöf Σ para cada $n \in \mathbb{N}$, la estrechez de $C_p(X)$ es numerable [Tk7, Problem 149], y por tanto $t(Y) \leq \omega$; además, $C_p(X)$ es monolítico [Ar4, Theorem II.6.8], pues X al ser un espacio Lindelöf Σ, es estable (ver el Teorema 1.2.18). Entonces Y es un espacio monolítico, compacto y de estrechez numerable. Por la Afirmación, el espacio Y es de Fréchet-Urysohn. ■

Teorema 2.2.17. Si X es un espacio Lindelöf Σ y $C_p(X)$ es normal, entonces $C_p(X)$ es un espacio de Lindelöf.

Demostración. El espacio $C_p(X)$ es homeomorfo a $C_p(X,(0,1))$ [Tk7, Fact 1, S.295] el cual es denso en $C_p(X,[0,1])$; además es inmediato que $C_p(X,(0,1))$ es convexo y en consecuencia O-convexo. Puesto que $C_p(X,[0,1])$ es denso en $[0,1]^X$ [Tk7, Problem 34], tenemos que $C_p(X)$ es homeomorfo a un subconjunto denso y O-convexo de $[0,1]^X$. Entonces por el Teorema 2.2.12, el extent de $C_p(X)$ es numerable. Finalmente, $C_p(X)$ es un espacio de Lindelöf por el Teorema 2.2.14. ■

Teorema 2.2.18. Supongamos que X es un espacio Lindelöf Σ. Si existe $g \in C_p(X)$ tal que $C_p(X)\backslash\{g\}$ es normal, entonces X es separable.

Demostración. Dado un espacio T y un punto $t \in T$, el pseudocáracter de t en T se define por $\psi(t,T) = min\{|\mathcal{U}| : \{t\} = \bigcap\mathcal{U}$ y $\mathcal{U} \subseteq \tau(T)\}$ y el pseudocarácter de X, como $\psi(T) = sup\{\psi(t,T) : t \in T\}$.

Afirmación. Supongamos que tenemos un espacio T y $t \in T$. Si $T\backslash\{t\}$ es Lindelöf, entonces $\psi(t,T) \leq \omega$.

Para cada $s \in T\backslash\{t\}$ tomemos un conjunto $U_s \in \tau(s,T)$ tal que $t \notin \overline{U_s}$. Entonces existe un conjunto numerable $A \subseteq T\backslash\{t\}$ tal que $T\backslash\{t\} = \bigcup_{s\in A} U_s$, y por consiguiente $\{t\} = \bigcap_{s\in A}(T\backslash\overline{U_s})$. □

Puesto que $C_p(X)$ es homeomorfo a $C_p(X,(0,1))$ [Tk7, Fact 1, S.295], el espacio $Y = C_p(X)\backslash\{g\}$ es homeomorfo a $Z = C_p(X,(0,1))\backslash\{f\}$ para algún $f \in C_p(X,(0,1))$. Es claro que Z es un subespacio denso y O-convexo de $C_p(X,(0,1))$, el cual a su vez es denso en $[0,1]^X$ [Tk7, Problem 34]. Entonces por el Teorema 2.2.12 el espacio Z, y por lo tanto Y, tiene extent numerable. Por el Teorema 2.2.14, el espacio Y es de Lindelöf.
De la Afirmación se sigue que $\psi(g, C_p(X)) \leq \omega$. Para cada $f \in Y$ existe un homeomorfismo $S_f : C_p(X) \to C_p(X)$ tal que $S_f(g) = f$ [Tk7, Problem 79], por lo cual $\psi(f, C_p(X)) \leq \omega$ para todo $f \in C_p(X)$. Finalmente, $d(X) = \psi(C_p(X)) \leq \omega$ [Tk7, Problem 173]. ■

Teorema 2.2.19. Supongamos que X es un espacio Lindelöf Σ y ω-monolítico. Si existe $g \in C_p(X)$ tal que $C_p(X)\backslash\{g\}$ es normal, entonces X tiene peso de red numerable.

Demostración. Por el Teorema 2.2.18 el espacio X es separable. De la definición de espacio ω-monolítico se sigue que $nw(X) \leq \omega$. ■

2.3. La propiedad Lindelöf Σ es espacios de funciones iterados

En esta sección se presenta un teorema de Uspenkij sobre el marco Lindelöf Σ del espacio $C_p(X)$ cuando X es Lindelöf Σ. El resultado principal de esta sección es un teorema de Okunev que establece la condición Lindelöf Σ para $C_p(Y)$ cuando X y $Y \subseteq C_p(X)$ son espacios Lindelöf Σ. Concluimos la sección con dos teoremas de Tkachuk sobre la propiedad Lindelöf Σ de espacios de funciones iterados de la forma $C_{p,2n+1}(X)$ y $C_{p,2n}(\upsilon X)$.

Definición 2.3.1. Dado un espacio X, consideremos al mapeo $i = \triangle C(X) : X \to \mathbb{R}^{C(X)}$ donde $\triangle C(X)$ es el producto diagonal de la familia $C(X)$. Notemos que i coincide con el mapeo evaluación $E^{C(X)} : X \to C_p(C_p(X))$. Puesto que X es un espacio de Tychonoff, la familia $C(X)$ separa los puntos de los cerrados en X y por consiguiente el mapeo i es un encaje [Tk7, Problem 166]. Denotemos por υX al espacio $\overline{i(X)}$, donde la barra denota la cerradura de $i(X)$ es en el espacio $\mathbb{R}^{C(X)}$. Identificando a X e $i(X)$, llamamos al espacio υX la realcompactificación del espacio X. Diremos que X es realcompacto si $X = \upsilon X$, es decir, si $X = i(X)$ es cerrado en $\mathbb{R}^{C(X)}$.

Proposición 2.3.2. Sea Y un espacio y supongamos que $X \subseteq Y$. Si cada función $g \in C(X, [1, \infty))$ puede ser extendida a un mapeo continuo sobre Y, entonces cada $f \in C(X)$ puede ser extendido continuamente sobre Y.

Demostración. Denotemos por z a la función constante cero con dominio en X. Para cualquier $f \in C(X)$ hagamos $f_1 = max\{f, z\}+1$ y $f_0 = max\{-f, z\}+1$. Es claro que $f = f_1 - f_0$, mientras $f_0 \in C(X, [1, \infty))$ y $f_1 \in C(X, [1, \infty))$. Existen extensiones continuas $g_0, g_1 \in C(Y)$ de f_0 y f_1 respectivamente, por lo que $g = g_1 - g_0$ es una extención continua de f. ■

Proposición 2.3.3. Para la función $j = \triangle C(X, (0, 1)) : X \to (0, 1)^{C(X,(0,1))}$, existe un homeomorfismo $\Phi : (0, 1)^{C(X,(0,1))} \to \mathbb{R}^{C(X)}$ tal que $\Phi(j(x)) = i(x)$ para cada $x \in X$. En particular $\Phi(j(X)) = i(X)$, por lo que X esta encajado en $(0, 1)^{C(X,(0,1))}$ y $j(X)$ es cerrado en $(0, 1)^{C(X,(0,1))}$ si y sólo si $i(X)$ es cerrado en $\mathbb{R}^{C(X)}$.

Demostración. Consideremos un homeomorfismo $\varphi : (0, 1) \to \mathbb{R}$. Definamos un mapeo $\Phi : (0, 1)^{C(X,(0,1))} \to \mathbb{R}^{C(X)}$ por $\Phi(v)(f) = \varphi(v(\varphi^{-1} \circ f))$ para cualquier par de funciones $v \in (0, 1)^{C(X,(0,1))}$ y $f \in C(X)$. Para cada $f \in C(X)$ y $g \in C(X, (0, 1))$ denotemos por $p_f : \mathbb{R}^{C(X)} \to \mathbb{R}$ y $q_g : (0, 1)^{C(X,(0,1))} \to (0, 1)$ a las proyecciones naturales de $\mathbb{R}^{C(X)}$ en el f-ésimo factor y $(0, 1)^{C(X,(0,1))}$ en el g-ésimo factor respectivamente. Notemos que $p_f \circ \Phi(v) = \varphi(v(\varphi^{-1} \circ f)) = \varphi(q_{\varphi^{-1} \circ f}(v)) = \varphi \circ q_{\varphi^{-1} \circ f}(v)$, por lo que $p_f \circ \Phi = \varphi \circ q_{\varphi^{-1} \circ f}$ es un mapeo continuo para cada $f \in C(X)$ y por consiguiente Φ es continuo [Tk7, Problem 102].
Si $w \in \mathbb{R}^{C(X)}$, definamos $v(g) = \varphi^{-1}(w(\varphi \circ g))$ para cada $g \in C(X, (0, 1))$. Entonces $v \in (0, 1)^{C(X,(0,1))}$ y $\Phi(v) = w$, por lo que el mapeo Φ es sobreyectivo.
Ahora, si $v_1, v_2 \in (0, 1)^{C(X,(0,1))}$ y $v_1 \neq v_2$, existe $g \in C(X, (0, 1))$ tal que $v_1(g) \neq v_2(g)$. Para la función $f = \varphi \circ g \in C(X)$, tenemos que

$$\Phi(v_1)(f) = \varphi(v_1(\varphi^{-1} \circ f)) = \varphi(v_1(g)) \neq \varphi(v_2(g)) = \Phi(v_2)(f),$$

lo que muestra que $\Phi(v_1) \neq \Phi(v_2)$, y por consiguiente que Φ es biyectivo. Para verificar la continuidad de Φ^{-1}, notemos que $\Phi^{-1}(w)(g) = \varphi^{-1}(w(\varphi \circ g))$ para culesquiera $w \in \mathbb{R}^{C(X)}$ y $g \in C(X, (0, 1))$. En efecto, haciendo $v = \Phi^{-1}(w)$ y $f = \varphi \circ g$, obtenemos $\Phi(v) = w$ y por lo tanto $w(f) = \varphi(v(g))$, de donde $\Phi^{-1}(w)(g) = v(g) = \varphi^{-1}(w(f)) = \varphi^{-1}(w(\varphi \circ g))$.
Tomemos una función arbitraria $g \in C(X, (0, 1))$; entonces, para cada $w \in \mathbb{R}^{C(X)}$ se tiene

que $q_g \circ \Phi^{-1}(w) = \Phi^{-1}(w)(g) = \varphi^{-1}(w(\varphi \circ g)) = \varphi^{-1}(p_f(w))$, donde $f = \varphi \circ g$. Como una consecuencia, la función $q_g \circ \Phi^{-1} = \varphi^{-1} \circ p_f$ es continua para cualquier $g \in C(X,(0,1))$, y por consiguiente mapeo Φ^{-1} es continuo [Tk7, Problem 102]. Esto demuestra que Φ es un homeomorfismo. Para cada $x \in X$ y $f \in C(X)$ tenemos que $\Phi(j(x))(f) = \varphi(j(x)(\varphi^{-1} \circ f)) = \varphi(\varphi^{-1}(f(x)) = f(x) = i(x)(f)$ y por lo tanto $\Phi(j(x)) = i(x)$ para todo $x \in X$.
Finalmente, observemos que el mapeo $j = \Phi^{-1} \circ i$ es un encaje; puesto que un homeomorfismo es un mapeo cerrado, el conjunto $i(X) = \Phi(j(X))$ es cerrado en $\mathbb{R}^{C(X)}$ si y sólo si $j(X) = \Phi^{-1}(i(X))$ es cerrado en $(0,1)^{C(X,(0,1))}$. ■

Teorema 2.3.4. Los siguientes enunciados son equivalentes para cualquier espacio X:
(a) X es realcompacto;
(b) X se encaja como un subespacio cerrado en $\mathbb{R}^\kappa$ para algún cardinal $\kappa \geq \omega$;
(c) si X es denso en Y y $X \neq Y$, entonces existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ que no se extiende continuamente a Y;
(d) si $x \in \beta X \backslash X$, entonces existe un conjunto H de tipo G_δ en βX tal que $x \in H$ y $H \subseteq \beta X \backslash X$.

Demostración. (a)⇒(b) Si X es realcompacto, entonces se encaja como un subconjunto cerrado en $\mathbb{R}^{|C(X)|}$.

(b)⇒(c) Para cada $\alpha < \kappa$ denotemos por $p_\alpha : \mathbb{R}^\kappa \to \mathbb{R}$ a la proyección natural de $\mathbb{R}^\kappa$ en el α-ésimo factor. Escojamos $y \in Y \backslash X$; si podemos encontrar $f \in C(X)$ que no pueda ser extendida continuamente a $X \cup \{y\}$, entonces f no podrá extenderse continuamente a Y. Por lo tanto, podemos asumir que $Y = X \cup \{y\}$.
Supongamos que para todo $\alpha < \kappa$ hemos encontrado una extención continua $g_\alpha : Y \to \mathbb{R}$ de $f_\alpha = p_\alpha|_X$. Hagamos $g = \triangle_{\alpha<\kappa} g_\alpha : Y \to \mathbb{R}^\kappa$ y tomemos cualesquiera $x \in X$ y $\alpha < \kappa$; entonces $g(x)(\alpha) = g_\alpha(x) = f_\alpha(x) = p_\alpha(x) = x(\alpha)$. Por lo tanto $g|_X$ es el mapeo identidad. Puesto que X es denso en Y, tenemos que $g(Y) = g(\overline{X}) \subseteq \overline{g(X)} = \overline{X} = X$, por lo que existe $x \in X$ tal que $g(y) = x$.
Escojamos vecindades disjuntas $U \in \tau(y, Y)$ y $V \in \tau(x, Y)$; el conjunto V es una vecindad de $g(y)$ en X y así por continuidad podemos encontrar $W \in \tau(y, Y)$ tal que $g(W) \subseteq V$. Como X es denso en Y, existe $z \in (U \cap W) \cap X$, y por consiguiente $z = g(z) \in g(W) \subseteq V$, lo que es una contradicción con el hecho de que U y V son disjuntos. Esta contradicción muestra que existe $\alpha < \kappa$ para el cual la función f_α no se puede extender continuamente sobre Y.

(c)⇒(d) Tomemos $z \in \beta X \backslash X$; de la Proposición 2.3.2 se sigue que existe $f \in C(X)$ tal que $f(X) \subseteq [1, \infty)$ y f no puede ser extendida continuamente sobre el espacio $Y = X \cup \{z\}$. Si $g = 1/f$, entonces $g \in C(X, [0,1])$, por lo que existe $\widehat{g} \in C(\beta X)$ tal que $\widehat{g}|_X = g$.
Supongamos que $\widehat{g}(z) \neq 0$; entonces $(1/\widehat{g})|_Y$ es una extención continua de f a Y, lo que es una contradicción. Por lo tanto $\widehat{g}(z) = 0$ y $\widehat{g}(x) = (1/f)(x) \neq 0$ para cada $x \in X$. Si $H = (\widehat{g})^{-1}(\{0\})$, entonces $z \in H \subseteq \beta X \backslash X$ y H es un conjunto G_δ.

(d)⇒(a) Por la Proposición 2.3.3, para demostrar que $i(X)$ es cerrado en $\mathbb{R}^{C(X)}$ basta demostrar que $j(X)$ es cerrado en $(0,1)^{C(X,(0,1))}$. Cada $g \in C(X,(0,1))$ es una función continua y acotada de X a $[0,1]$, por lo que existe una única función $s_g : \beta X \to [0,1]$ tal que $s_g|_X = g$. El mapeo $s = \triangle\{s_g : g \in C(X,(0,1))\} : \beta X \to [0,1]^{C(X,(0,1))}$ es continuo y $s|_X = j$; considerando que $(0,1)^{C(X,(0,1))} \subseteq [0,1]^{C(X,(0,1))}$, verifiquemos que $j(X) = s(\beta X) \cap (0,1)^{C(X,(0,1))}$. La contención $j(X) \subseteq s(\beta X) \cap (0,1)^{C(X,(0,1))}$ se sigue del hecho de que $s|_X = j$. Tomemos cualquier $z \in \beta X \backslash X$; por (d), existe un conjunto H de tipo G_δ en βX tal que $z \in H \subseteq \beta X \backslash X$. Podemos encontrar un conjunto G cerrado en βX y de tipo G_δ tal que $z \in G \subseteq H$ [Tk7, Fact 2, S.328]. Por [Tk7, Fact 1, S.358] existe $f \in C(\beta X)$ para el cual $G = f^{-1}(\{0\})$. Puesto que βX es compacto, $f(\beta X) \subseteq [-n, n]$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Si $h = \frac{1}{2n}|f|$, entonces $h \in C(\beta X, [0, \frac{1}{2}])$ y $h^{-1}(\{0\}) = G$.

La función $g = h|_X$ mapea X en $(0, \frac{1}{2}] \subseteq (0,1)$ puesto que todos los ceros de h están en $\beta X \backslash X$; es evidente que $h = s_g$ y $g \in C(X, (0,1))$. Por lo tanto $s(z)(g) = s_g(z) = h(z) = 0 \notin (0,1)$ lo que muestra que $s(z) \notin (0,1)^{C(X,(0,1))}$. Esto demuestra que $j(X) = s(\beta X) \cap (0,1)^{C(X,(0,1))}$, y por consiguiente $j(X)$ es cerrado en $(0,1)^{C(X,(0,1))}$, puesto que $s(\beta X)$ es cerrado en $[0,1]^{C(X,(0,1))}$. ■

Proposición 2.3.5. El producto arbitrario de espacios realcompactos es realcompacto.

Demostración. Supongamos que $\{X_t : t \in T\}$ es una familia de espacios realcompactos. Por el Teorema 2.3.4, para cada $t \in T$ podemos escoger un conjunto A_t tal que X_t es homeomorfo a un subespacio cerrado F_t de $\mathbb{R}^{A_t}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que para distintos $s, t \in T$ los conjuntos A_t y A_s son disjuntos. Entonces el conjunto $F = \prod_{t \in T} F_t$ es cerrado en $\mathbb{R}^A$, donde $A = \bigcup_{t \in T} A_t$ [Tk7, Problem 103]. Es claro que $X = \prod_{t \in T} X_t$ es homeomorfo a F, y por consiguiente X se encaja como un subespacio cerrado en $\mathbb{R}^{|A|}$. Por el Teorema 2.3.4, el espacio X es realcompacto. ■

Proposición 2.3.6. Los subespacios cerrados de un espacio realcompacto son realcompactos.

Demostración. Supongamos que X es un espacio realcompacto y $F \subseteq X$ es cerrado. Por el Teorema 2.3.4, existe un cardinal infinito κ tal que X se encaja como un subespacio cerrado en $\mathbb{R}^\kappa$. Entonces F se encaja como un subespacio cerrado en $\mathbb{R}^\kappa$, y por lo tanto es realcompacto. ■

Proposición 2.3.7. Supongamos que X es un espacio arbitrario. Si $\{X_t : t \in T\}$ es una familia de subespacios realcompactos de X, entonces $\bigcap_{t \in T} X_t$ es realcompacto.

Demostración. El espacio $\bigcap_{t \in T} X_t$ es homeomorfo a un subespacio cerrado de $\prod_{t \in T} X_t$ [Tk7, Fact 7, S.271], por lo que la realcompacidad de $\bigcap_{t \in T} X_t$ se sigue de las proposiciones 2.3.5 y 2.3.6. ■

Proposición 2.3.8. Todo espacio Lindelöf es realcompacto.

Demostración. Supongamos que X es un espacio de Lindelöf. Por el Teorema 2.3.4 basta probar que para todo $z \in \beta X \backslash X$, existe un conjunto H de tipo G_δ para el cual $z \in H \subseteq \beta X \backslash X$.
Para cada $x \in X$ escojamos $U_x \in \tau(x, \beta X)$ tal que $z \notin \overline{U_x}$. La familia $\{U_x : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X, por lo que $X \subseteq \bigcup_{x \in A} U_x$ para algún conjunto numerable $A \subseteq X$. El conjunto $H = \beta X \backslash \bigcup_{x \in A} \overline{U_x}$ es G_δ y $z \in H \subseteq \beta X \backslash X$. ■

Proposición 2.3.9. Todo espacio pseudocompacto y realcompacto es compacto.

Demostración. Supongamos que X es un espacio pseudocompacto y realcompacto. Por el Teorema 2.3.4 existe un cardinal $\kappa \geq \omega$ tal que X se encaja en $\mathbb{R}^\kappa$ como un subespacio cerrado. Para cada $\alpha < \kappa$ denotemos por $p_\alpha : \mathbb{R}^\kappa \to \mathbb{R}$ a la proyección natural de $\mathbb{R}^\kappa$ sobre el α-ésimo factor. El conjunto $X_\alpha = p_\alpha(X)$ es un conjunto pseudocompacto de $\mathbb{R}$ para todo α y por tanto compacto. Es evidente que $X \subseteq \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha$; además X es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^\kappa$ el cual contiene al compacto $\prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha$. Entonces X es cerrado en $\prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha$ y por lo tanto compacto. ■

Definición 2.3.10. Sean X un espacio y $A \subseteq X$. Diremos que A está C-encajado en X si para cada función continua $f : A \to \mathbb{R}$ existe una función continua $g : X \to \mathbb{R}$ tal que $g|_A = f$.

Proposición 2.3.11. Todo espacio X es homeomorfo a un conjunto C-encajado en $\mathbb{R}^{C(X)}$.

Demostración. Puesto que X es un espacio de Tychonoff, la familia $C(X)$ separa los puntos de los cerrados en X, por lo que el mapeo evaluación $E^{C(X)} : X \to C_p(C_p(X))$ es un encaje [Tk7, Problem 166]. Veamos que $Y = E^{C(X)}(X)$ está C-encajado en $\mathbb{R}^{C(X)}$. Tomemos cualquier función continua $f : Y \to \mathbb{R}$ y notemos que $g = f \circ E^{C(X)} \in C(X)$. Denotemos por $\pi_g : \mathbb{R}^{C(X)} \to \mathbb{R}$ a la proyección natural de $\mathbb{R}^{C(X)}$ en su g-ésimo factor.
Si $\varphi \in Y$ y $x \in X$ se eligió de tal manera que $E^{C(X)}(x) = \varphi$, entonces $\pi_g(\varphi) = \pi_g(E^{C(X)}(x)) = g(x) = (f \circ E^{C(X)})(x) = f(\varphi)$, y por lo tanto $\pi_g|_Y = f$. ■

Teorema 2.3.12. Si X es un espacio pseudocompacto, entonces existe un espacio σ-compacto Y tal que $C_p(X) \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}^X$.

Demostración. Si $Y = \{f \in \mathbb{R}^X : f(X) \subseteq [-n, n]$ para algún $n < \omega\}$, entonces $C_p(X) \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}^X$. Tomemos al conjunto $F_n = \{g \in \mathbb{R}^X : g(X) \subseteq [-n, n]\}$ para cada $n < \omega$. Es claro que $Y = \bigcup_{n<\omega} F_n$; además cada F_n es compacto por ser homeomorfo a $[-n, n]^X$. Por lo tanto Y es σ-compacto. ■

Teorema 2.3.13. Si X es un espacio Lindelöf Σ, entonces existe un espacio Y el cual es Lindelöf Σ y $C_p(X) \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}^X$.

Demostración. Sean $\mathcal{C}$ una cubierta compacta de X y $\mathcal{F}$ una red numerable con respecto a $\mathcal{C}$. Consideremos al espacio $Y = \{f \in \mathbb{R}^X :$ para cada $x \in X$ existen $F \in \mathcal{F}$ y $k < \omega$ tales que $x \in F$ y $f(F) \subseteq [-k, k]\}$. Supongamos que $f \in C_p(X)$. Sea $x \in X$ y tomemos $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C$; el conjunto $f(C)$ es compacto y por lo tanto acotado en $\mathbb{R}$. Escojamos $m < \omega$ tal que $f(C) \subseteq [-m, m]$. El conjunto $U = f^{-1}((-m-1, m+1))$ es abierto en X y $C \subseteq U$, por lo que existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $C \subseteq F \subseteq U$. Si $k = m + 1$, entonces $x \in F$ y $f(F) \subseteq [-k, k]$. Esto demuestra que $f \in Y$ y por lo tanto $C_p(X) \subseteq Y$.
Si $Z = (\beta\mathbb{R})^X$, entonces $C_p(X) \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}^X \subseteq Z$. Sea $\{F_n : n < \omega\}$ una numeración de $\mathcal{F}$; para todos $n, k < \omega$ fijémonos en el conjunto $L(n, k) = \{f \in Z : f(F_n) \subseteq [-k, k]\}$.
Supongamos que $n, k < \omega$ y $g \in Z \backslash L(n, k)$. Elijamos un punto $x \in F_n$ tal que $g(x) \notin [-k, k]$. El conjunto $[-k, k]$ es compacto y por tanto cerrado en $\beta\mathbb{R}$. Es claro que el conjunto $O = \{f \in Z : f(x) \in (\beta\mathbb{R}) \backslash [-k, k]\}$ es una vecindad abierta de g que no intersecta a $L(n, k)$, lo que demuestra que para cualesquiera $n, k < \omega$ el conjunto $L(n, k)$ es cerrado en Z y en consecuencia compacto.
Por el Teorema 1.1.9 basta demostrar que la familia $\mathcal{L} = \{L(n, k) : n, k < \omega\}$ separa a Y de $Z \backslash Y$.
Sean $f \in Y$ y $g \in Z \backslash Y$. Como $g \notin Y$, existe $x_0 \in X$ tal que para cada $n, k < \omega$, si $x_0 \in F_n$, entonces $g(F_n) \backslash [-k, k] \neq \emptyset$. Puesto que $f \in Y$, existen $n_0, k_0 < \omega$ tales que $x_0 \in F_{n_0}$ y $f(F_{n_0}) \subseteq [-k_0, k_0]$. Por lo tanto, $f \in L(n_0, k_0)$ y $g \notin L(n_0, k_0)$. ■

Teorema 2.3.14. Si $C_p(X)$ es Lindelöf Σ, entonces υX es Lindelöf Σ.

Demostración. Por el Teorema 2.3.13, existe un espacio Y con la propiedad Lindelöf Σ para el cual $C_p(C_p(X)) \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}^{C_p(X)}$. El espacio X esta encajado en $C_p(C_p(X))$ [Tk7, Problem 167], así que podemos asumir que X es un subespacio de Y. Si Z es la cerradura de X en Y, entonces Z es un espacio realcompacto por ser Lindelöf Σ (Proposición 2.3.8). Como X está C-encajado en $\mathbb{R}^{C(X)}$, toda función continua de X en $\mathbb{R}$ se puede extender a una función continua de Z en $\mathbb{R}$. Esto demuestra que υX es homeomorfo a Z y por lo tanto es Lindelöf Σ [En, Theorem 3.11.16]. ■

Teorema 2.3.15. Si $C_p(X)$ es un espacio Lindelöf Σ, entonces $C_p(\upsilon X)$ tambien es Lindelöf Σ.

Demostración. Consideremos una cubierta compacta $\mathcal{C}$ de $C_p(X)$ y una red numerable $\mathcal{N}$ con respecto a $\mathcal{C}$. Definamos $\mathcal{C}' = \{\pi^{-1}(C) : C \in \mathcal{C}\}$ y $\mathcal{N}' = \{\pi^{-1}(N) : N \in \mathcal{N}\}$, donde $\pi : C_p(\upsilon X) \to C_p(X)$ es el mapeo restricción definido por $\pi(f) = f|_X$ para cada $f \in C_p(\upsilon X)$; se sabe que π es biyectivo [Tk7, Problem 436]. Si $C \in \mathcal{C}$, entonces $\pi^{-1}(C)$ es numerablemente compacto. Para ver esto, supongamos que $A \subseteq \pi^{-1}(C)$ es un conjunto cerrado, discreto y numerable. Si $B = \pi(A)$ no es cerrado y discreto, existe un punto de acumulación p de B. Como $\pi|_{A\cup\{\pi^{-1}(p)\}} : A \cup \{\pi^{-1}(p)\} \to B \cup \{p\}$ es un homeomorfismo [Tk7, Problem 436], el punto $\pi^{-1}(p)$ es de acumulación para A, lo que contradice que A sea cerrado y discreto. Entonces $\pi(A)$ es cerrado y discreto en el compacto C, y en consecuencia finito. Por lo tanto A tiene que ser finito lo que muestra que $\pi^{-1}(C)$ es numerablemente compacto.
Como $C_p(X)$ es Lindelöf Σ, el espacio υX tambien es Lindelöf Σ (Teorema 2.3.14). Del Teorema 2.2.14 se sigue que $l(\pi^{-1}(C)) = ext(\pi^{-1}(C)) \leq \omega$. El espacio $\pi^{-1}(C)$ es numerablemente compacto y $l(\pi^{-1}(C)) \leq \omega$, de donde se sigue que es compacto. Por lo tanto $\mathcal{C}'$ es una cubierta compacta de $C_p(\upsilon X)$. Para demostrar que $C_p(\upsilon X)$ es un espacio Lindelöf Σ, basta verificar que $\mathcal{N}'$ es una red numerable con respecto a $\mathcal{C}'$.
Fijemos $C \in \mathcal{C}$ y $W \in \tau(\pi^{-1}(C), C_p(\upsilon X))$. Si W no contiene a ningún elemento de $\mathcal{L}' = \{\pi^{-1}(N) : N \in \mathcal{N} \text{ y } \pi^{-1}(C) \subseteq \pi^{-1}(N)\}$, entonces para cada $\pi^{-1}(N) \in \mathcal{L}'$ escojamos $f_N \in \pi^{-1}(N)\backslash W$ y hagamos $g_N = \pi(f_N)$. La familia $\mathcal{L} = \{N : \pi^{-1}(N) \in \mathcal{L}'\}$ consiste de todos los elementos de $\mathcal{N}$ que contienen a C.
Notemos que $C \cap \overline{\{g_N : N \in \mathcal{L}\}} \neq \emptyset$; en efecto, si $C \cap \overline{\{g_N : N \in \mathcal{L}\}} = \emptyset$, entonces existe $K \in \mathcal{L}$ tal que $C \subseteq K \subseteq C_p(X)\backslash\overline{\{g_N : N \in \mathcal{L}\}}$. Esta contradicción con $g_K \in K$ muestra que $C \cap \overline{\{g_N : N \in \mathcal{L}\}} \neq \emptyset$.
Si $g \in \overline{\{g_N : N \in \mathcal{L}\}} \cap C$, entonces $f = \pi^{-1}(g) \in \overline{\{f_N : N \in \mathcal{L}\}}$ pues π es un homeomorfismo si lo restringimos a $\{f\} \cup \{f_N : N \in \mathcal{L}\}$ [Tk7, Problem 436]. Por lo tanto $f \in \pi^{-1}(C) \cap \overline{\{f_N : N \in \mathcal{L}\}}$, lo que contradice la contención $\{f_N : N \in \mathcal{L}\} \subseteq C_p(\upsilon X)\backslash W$. Esta contradicción muestra que $\mathcal{N}'$ es una red con respecto a $\mathcal{C}'$. ■

Proposición 2.3.16. Si X y $C_p(X, [0, 1])$ son espacios Lindelöf Σ, entonces $C_p(X)$ también es un espacio Lindelöf Σ.

Demostración. Consideremos un homeomorfismo $\varphi : \mathbb{R} \to (0, 1)$. Entonces el mapeo $h_\varphi : \mathbb{R}^X \to (0, 1)^X$ definido por $h_\varphi(f) = \varphi \circ f$ para cada $f \in \mathbb{R}^X$ es un homeomorfismo y $h_\varphi(C_p(X)) = C_p(X, (0, 1))$ [Tk7, Problem 91]. Por el Teorema 2.3.13 existe un espacio Y que tiene la propiedad Lindelöf Σ y para el cual $C_p(X) \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}^X$. Entonces $L = h_\varphi(Y)$ es Lindelöf Σ y $C_p(X, (0, 1)) \subseteq L \subseteq (0, 1)^X \subseteq [0, 1]^X$. De la igualdad $C_p(X, (0, 1)) = L \cap C_p(X, [0, 1])$ se sigue que $C_p(X, (0, 1))$ es Lindelöf Σ. De modo que $C_p(X)$ es Lindelöf Σ por ser homeomorfo a $C_p(X, (0, 1))$. ■

El resultado principal de esta sección es el siguiente teorema de Okunev.

Teorema 2.3.17. Sean X y Y espacios Lindelöf Σ tales que $Y \subseteq C_p(X)$. Entonces $C_p(Y)$ es Lindelöf Σ.

Demostración. Hagamos $Q = \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, escojamos una cubierta compacta $\mathcal{C}$ de Y y una red numerable $\mathcal{F}$ con respecto a $\mathcal{C}$. Dados $f \in Y$, $n \in \mathbb{N}$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ y $\delta > 0$ consideremos el conjunto $O(f, x, \delta) = \{g \in Y : |g(x_i) - f(x_i)| < \delta$ para cada $i \in \{1, ..., n\}\}$. Es evidente que la familia $\{O(f, x, \delta) : n \in \mathbb{N},\ x \in X^n \text{ y } \delta > 0\}$ forma una base local de Y en f. Para cualesquiera $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $n \in \mathbb{N}$ y $P \subseteq Y$ hagamos $M(\varepsilon, \delta, n, P) = \{(\varphi, x) \in [0,1]^Y \times X^n : |\varphi(f) - \varphi(g)| \leq \varepsilon$ para todo $g \in P$ y $f \in O(g, x, \delta)\}$ y $L(\varepsilon, \delta, n, P) = \pi_n(M(\varepsilon, \delta, n, P))$, donde $\pi_n : [0,1]^Y \times X^n \to [0,1]^Y$ es la proyección natural de $[0,1]^Y \times X^n$ en el factor $[0,1]^Y$. Veamos ahora que para cada $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $n \in \mathbb{N}$ y $P \subseteq Y$,

(1) el conjunto $M(\varepsilon, \delta, n, P)$ es cerrado en $[0,1]^Y \times X^n$.

Para demostrar (1) escojamos un elemento arbitrario $(\varphi, x) \in ([0,1]^Y \times X^n) \backslash M(\varepsilon, \delta, n, P)$. Existen $g \in P$ y $f \in O(g, x, \delta)$ tales que $|\varphi(f) - \varphi(g)| > \varepsilon$, por lo que el conjunto $W = \{\eta \in [0,1]^Y : |\eta(f) - \eta(g)| > \varepsilon\}$ es abierto en $[0,1]^Y$ y $\varphi \in W$. De la continuidad de f y g se sigue que $V = \{y \in X : |f(y) - g(y)| < \delta\}$ es abierto en X, y por tanto V^n es abierto en X^n. Es claro que $(\varphi, x) \in W \times V^n$ y $(W \times V^n) \cap M(\varepsilon, \delta, n, P) = \emptyset$, lo que demuestra (1).

Puesto que $[0,1]^Y \times X^n$ es un espacio Lindelöf Σ y $L(\varepsilon, \delta, n, P)$ es una imagen continua de un subespacio cerrado de $[0,1]^Y \times X^n$, es inmediato que:

(2) $L(\varepsilon, \delta, n, P)$ es un espacio Lindelöf Σ.

La familia $\mathcal{L} = \{L(\varepsilon, \delta, n, P) : \varepsilon, \delta \in Q,\ n \in \mathbb{N}$ y $P \in \mathcal{F}\}$ es numerable y consta de subespacios Lindelöf Σ de $[0,1]^Y$. Dado un conjunto Z y dos subconjuntos disjuntos A, B de Z, una familia $\mathcal{S} \subseteq exp(Z)$ separa A de B si para cada $a \in A$ y $b \in B$ existe $S \in \mathcal{S}$ tal que $a \in S$ y $b \notin S$. Resulta que:

(3) $\mathcal{L}$ separa a $C_p(Y, [0,1])$ de $[0,1]^Y \backslash C_p(Y, [0,1])$.

Para demostrar (3) escojamos $\varphi \in C_p(Y, [0,1])$ y $\eta \in [0,1]^Y \backslash C_p(Y, [0,1])$. Como η no es continua, existen $g \in Y$ y $\varepsilon \in Q$ tales que:

$(*)$ para todo $n \in \mathbb{N},\ x \in X^n$ y $\delta > 0$ existe $f \in O(g, x, \delta)$ tal que $|\eta(f) - \eta(g)| > \varepsilon$.

Puesto que $\mathcal{C}$ es una cubierta de Y, podemos encontrar $C \in \mathcal{C}$ tal que $g \in C$. Por la continuidad de φ, para cualquier $h \in C$ existen $n_h \in \mathbb{N}$, $x_h \in X^{n_h}$ y $\delta_h \in Q$ tales que $|\varphi(t) - \varphi(h)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para cada $t \in O(h, x_h, 3\delta_h)$. La familia $\{O(h, x_h, \delta_h) : h \in C\}$ es una cubierta abierta del compacto C, por lo que existe un conjunto finito $H \subseteq C$ para el cual se tiene la contención $C \subseteq G = \bigcup\{O(h, x_h, \delta_h) : h \in H\}$; como $\mathcal{F}$ es una red con respecto a $\mathcal{C}$, podemos escoger $P \in \mathcal{F}$ para el cual $C \subseteq P \subseteq G$. Hagamos $\delta = min\{\delta_h : h \in H\}$, $m = \sum_{h \in H} n_h$ y sea x el punto de X^m tal que $\{x\} = \prod_{h \in H}\{x_h\}$.
Veamos que si $v \in P$ y $u \in O(v, x, \delta)$, entonces $|\varphi(u) - \varphi(v)| < \varepsilon$. Para comprobar esto basta observar que $v \in O(h, x_h, \delta_h)$ para algún $h \in H$; entonces $u \in O(h, x_h, 3\delta_h)$ y en consecuencia $|\varphi(u) - \varphi(v)| \leq |\varphi(u) - \varphi(h)| + |\varphi(h) - \varphi(v)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
De la elección del conjunto $M(\varepsilon, \delta, m, P)$ se tiene que $(\varphi, x) \in M(\varepsilon, \delta, m, P)$ y, por lo tanto $\varphi \in L = L(\varepsilon, \delta, m, P)$.
Por otro lado, la propiedad $(*)$ y $g \in P$, implican que la función η no pertenece a L, lo que concluye la demostración de (3).

De (3) y el Teorema 1.1.9 se sigue que $C_p(Y, [0,1])$ es un espacio Lindelöf Σ. Finalmente, el espacio $C_p(Y)$ es Lindelöf Σ por la Proposición 2.3.16. ■

Corolario 2.3.18. Si X y $C_p(X)$ son espacios Lindelöf Σ, entonces $C_{p,n}(X)$ es un espacio Lindelöf Σ para todo $n < \omega$.

Corolario 2.3.19. Si $C_p(X)$ es un espacio Lindelöf Σ, entonces $C_{p,n}(\upsilon X)$ es un espacio Lindelöf Σ para cada $n < \omega$.

Demostración. Por el Teorema 2.3.14, el espacio υX es Lindelöf Σ. Por el Teorema 2.3.15, el espacio $C_p(\upsilon X)$ es Lindelöf Σ. Finalmente, por el Corolario 2.3.18, $C_{p,n}(\upsilon X)$ es un espacio Lindelöf Σ para cada $n < \omega$. ■

Teorema 2.3.20. Si $C_p(X)$ es un espacio Lindelöf Σ, entonces $C_{p,2n+1}(X)$ tambien es un espacio Lindelöf Σ para todo $n < \omega$.

Demostración. El Corolario 2.3.19 implica que $C_{p,2n+1}(\upsilon X)$ es un espacio Lindelöf Σ por lo que es suficiente demostrar que $C_{p,2n+1}(X)$ es una imagen continua de $C_{p,2n+1}(\upsilon X)$. Probaremos por inducción sobre n que para cada $n < \omega$ existe una condensación π_n de $C_{p,2n+1}(\upsilon X)$ sobre $C_{p,2n+1}(X)$.
Comenzamos con el mapeo restricción $\pi_0 : C_p(\upsilon X) \to C_p(X)$ definido por $\pi(f) = f|_X$ para cada $f \in C_p(\upsilon X)$, el cual es una condensación [Tk7, Problem 436].
Supongamos que existe una condensación $\pi_k : C_{p,2k+1}(\upsilon X) \to C_{p,2k+1}(X)$.
Entonces el espacio $C_{p,2k+1}(X)$ es Lindelöf y por tanto normal. Por [Tk7, Problem 441], los espacios $C_{p,2k+2}(\upsilon X)$ y $\upsilon(C_{p,2k+2}(X))$ son homeomorfos. Esto implica que existe un homeomorfismo $h : C_{p,2k+3}(\upsilon X) \to C_p(\upsilon(C_{p,2k+2}(X)))$. De acuerdo a [Tk7, Problem 436] el obvio mapeo restricción nos da una condensación

$$\rho : C_p(\upsilon(C_{p,2k+2}(X))) \to C_{p,2k+3}(X).$$

La condensación prometida de $C_{p,2k+3}(\upsilon X)$ sobre $C_{p,2k+3}(X)$ es $\pi_{k+1} = \rho \circ h$. ■

Corolario 2.3.21. Si $C_p(X)$ es un espacio Lindelöf Σ, entonces $\upsilon(C_{p,2n}(X))$ es un espacio Lindelöf Σ para cada $n < \omega$.

Demostración. Por el Teorema 2.3.20 y [Tk7, Problem 441] el espacio $\upsilon(C_{p,2n}(X))$ es homeomorfo a $C_{p,2n}(\upsilon X)$. Finalmente, por el Corolario 2.3.19, $\upsilon(C_{p,2n}(X))$ es un espacio Lindelöf Σ. ■

Corolario 2.3.22. Si $C_pC_p(X)$ es un espacio Lindelöf Σ, entonces $C_{p,2n}(X)$ es un espacio Lindelöf Σ para cada $n < \omega$.

Corolario 2.3.23. **(a)** Si $C_{p,2k+1}(X)$ es un espacio Lindelöf Σ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces $C_{p,2n+1}(X)$ es un espacio Lindelöf Σ todo $n < \omega$.
(b) Si $C_{p,2k+2}(X)$ es un espacio Lindelöf Σ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces $C_{p,2n}(X)$ es un espacio Lindelöf Σ todo $n < \omega$.

Demostración. Notemos que los espacios $C_p(X)$ y $C_pC_p(X)$ se encajan como subespacios cerrados en $C_{p,2k+1}(X)$ y $C_{p,2k+2}(X)$, respectivamente. Entonces, basta aplicar el Teorema 2.3.20 y el Corolario 2.3.22. ■

2.4. Un famoso ejemplo de Reznichenko

Esta es la parte final del capítulo 2 cuyo resultado principal es el ejemplo de Reznichenko de un espacio compacto de Talagrand que es una unión numerable de espacios compactos de Eberlein pero falla en ser un compacto de Eberlein. Dicho espacio es canónicamente homeomorfo a la compactificación de Stone-Čech del complemento de uno de sus puntos mismo que es pseudocompacto. Como un resultado auxiliar se presenta un teorema de Talagrand sobre la K-analiticidad del espacio $C_p(X)$ cuando X es un espacio compacto.

Denotemos por $A(\kappa)$ a la compactificación unipuntual del espacio discreto de cardinalidad κ. Hagamos $\omega^0 = \{\emptyset\}$ y $\omega^{<\omega} = \{\omega^n : n \in \omega\}$; para cada $n \in \mathbb{N}$ identificaremos ω^n con el conjunto de todos los mapeos de $n = \{0, 1, ..., n-1\}$ a ω. Si $n \in \omega$ y $f \in \omega^n$, entonces $g = f^\frown k \in \omega^{n+1}$ es definido por $g|n = f$ y $g(n) = k$.
Sea $\mathbb{D} = \{0, 1\}$; dado un conjunto A, definamos $\sigma(\mathbb{D}^A) = \{x \in \mathbb{D}^A : |x^{-1}(1)| < \omega\}$ y $\Sigma(\mathbb{D}^A) = \{x \in \mathbb{D}^A : |x^{-1}(1)| \leq \omega\}$.

Definición 2.4.1. Dado un espacio Z, un punto $z \in Z$ es llamado un π-punto si existe una familia finita $\mathcal{U} \subseteq \tau(Z)$ tal que $\{x\} = \bigcap\{\overline{U} : U \in \mathcal{U}\}$.

Definición 2.4.2. Una familia $\{U_n : n < \omega\}$ de subconjuntos de un espacio Z *converge al punto* $z \in Z$ si para cada $V \in \tau(z, Z)$ existe $m \in \omega$ tal que $U_n \subseteq V$ para todo $n \geqslant m$.

Definición 2.4.3. Una sucesión $S \subseteq Z$ *converge flexiblemente* a $z \in Z$ si S converge a z y para cada familia $\{G_x : x \in S\}$ de subconjuntos G_δ de Z con $x \in G_x$ para cualquier $x \in X$, podemos escoger un punto $y(x) \in G_x$ para todo $x \in S$, de tal forma que la sucesión $\{y(x) : x \in S\}$ converja a un punto $y \in Z \backslash \{z\}$.

Teorema 2.4.4. Supongamos que K es un espacio compacto y algún $x \in K$ no es un π-punto. Entonces $K \backslash \{x\}$ es pseudocompacto y K es canónicamente homeomorfo a $\beta(K \backslash \{x\})$, esto es, existe un homeomorfismo $\varphi : \beta(K \backslash \{x\}) \to K$ tal que $\varphi(y) = y$ para cualquier $y \in K \backslash \{x\}$.

Demostración. Notemos que x no puede ser un punto aislado puesto que si lo es, entonces $\{x\} = \overline{U}$ donde $U = \{x\} \in \tau(K)$. Si el espacio $K \backslash \{x\}$ no es pseudocompacto, entonces existe una familia discreta $\mathcal{U} = \{U_n : n < \omega\} \subseteq \tau^*(K \backslash \{x\})$. Tomando cualquier $U \in \tau(x, K)$, si $U_n \backslash U \neq \emptyset$ para una cantidad infinita de $n \in \omega$, escojamos $V \in \tau(x, K)$ tal que $\overline{V} \subseteq U$ y notemos que la familia $\{U_n \backslash \overline{V} : n \in \omega \text{ y } U_n \backslash \overline{V} \neq \emptyset\} \subseteq \tau^*(K \backslash V)$ es infinita y discreta en el espacio compacto $K \backslash V$; esta contradicción muestra que $U_n \backslash U = \emptyset$ para todos salvo una cantidad finita de $n < \omega$, esto es, $\mathcal{U}$ converge al punto x.
Es fácil verificar que para los conjuntos abiertos $G = \bigcup_{n<\omega} U_{2n}$ y $H = \bigcup_{n<\omega} U_{2n+1}$, tenemos que $\{x\} = \overline{G} \cap \overline{H}$. Entonces x es un π-punto, lo que es de nuevo una contradicción por lo cual $K \backslash \{x\}$ es pseudocompacto.
Hagamos $L = \beta(K \backslash \{x\})$; puesto que el espacio K es una extensión compacta de $K \backslash \{x\}$, existe un mapeo continuo $\varphi : L \to K$ tal que $\varphi|_{K \backslash \{x\}}$ es el mapeo identidad.
Si $R = L \backslash (K \backslash \{x\})$ consta de un sólo elemento, entonces φ es un homeomorfismo canónico por lo que podemos asumir que existen puntos distintos $y_1, y_2 \in R$. Tomemos $U_1 \in \tau(y_1, L)$ y $U_2 \in \tau(y_2, L)$ tales que $cl_L(U_1) \cap cl_L(U_2) = \emptyset$.
El conjunto $V_i = U_i \cap (K \backslash \{x\})$ es abierto en el espacio K para cada $i \in \{1, 2\}$. Se sigue de [Tk7, Fact 1, S.259], que $\varphi(R) = \varphi(L \backslash (K \backslash \{x\})) = K \backslash (K \backslash \{x\}) = \{x\}$, y por consiguiente $\varphi(y_i) = x$; como también $y_i \in cl_L(V_i)$, tenemos que $x = \varphi(y_i) \in cl_K(\varphi[V_i])$ para cada $i \in \{1, 2\}$. Como consecuencia, $\{x\} \subseteq cl_K(V_1) \cap cl_K(V_2)$. Si por otro lado, $y \in K \backslash \{x\}$ y $y \in cl_K(V_1) \cap cl_K(V_2)$, entonces $y \in cl_L(V_1) \cap cl_L(V_2) = \emptyset$ lo cual es una contradicción. Esto demuestra que $\{x\} = cl_K(V_1) \cap cl_K(V_2)$, esto es, x es un π-punto lo que una vez más es una

contradicción. Por lo tanto K es canónicamente homeomorfo a $\beta(K\backslash\{x\})$. ■

Proposición 2.4.5. Dado un conjunto A, sea $u \in \mathbb{D}^A$ definido por $u(a) = 0$ para cada $a \in A$. Supongamos que $S_n \subseteq \sigma(\mathbb{D}^A)\backslash\{u\}$ es una sucesión que converge a u para todo $n \in \omega$. Entonces existe una sucesión $S \subseteq \bigcup\{S_n : n \in \omega\}$ tal que S converge a u, el conjunto $S \cap S_n$ es infinito para cualquier $n \in \omega$ y la familia $\{x^{-1}[\{1\}] : x \in S\}$ es disjunta.

Demostración. Consideremos una numeración $\{m_k : k \in \omega\}$ de ω, en la cual cada $n \in \omega$ aparece una cantidad infinita de veces. Tomemos de manera arbitraria $x_0 \in S_{m_0}$; supongamos que $n \in \omega$ y hemos escogido $x_i \in S_{m_i}$ para cada $i \leq n$ de tal forma que la familia $\{x_i^{-1}(1) : i \leq n\}$ es disjunta. Puesto que $S_{m_{n+1}}$ converge a u, la familia $\mathfrak{S} = \{x^{-1}(1) : x \in S_{m_{n+1}}\}$ es punto-finita, por lo que solamente una cantidad finita de los elementos de $\mathfrak{S}$ tienen intersección no vacía con el conjunto finito $A = \bigcup\{x_i^{-1}(1) : i \leq n\}$. Por consiguiente podemos escoger $x_{n+1} \in S_{m_{n+1}}$ para el cual $x_{n+1}^{-1}(1) \cap A = \emptyset$; es evidente que la familia $\{x_i^{-1}(1) : i \leq n+1\}$ también es disjunta, por lo que nuestro proceso inductivo nos da un conjunto $S = \{x_i : i \in \omega\}$ tal que $x_i \in S_{m_i}$ para cualquier $i \in \omega$ y la familia $\{x_i^{-1}(1) : i \in \omega\}$ es disjunta.
Es sencillo comprobar que la sucesión S es como se prometió. ■

Proposición 2.4.6. Dado un espacio compacto K, supongamos que K es Fréchet-Urysohn, $Y \subseteq K$ es denso en K y un punto $u \in K\backslash Y$ tiene la siguiente propiedad:

$(*)$ Si $S_n \subseteq Y$ es una sucesión que converge a u para cada $n \in \omega$, entonces existe una sucesión $S \subseteq K$ tal que $S \cap S_n$ es infinito para todo $n \in \omega$ y S converge flexiblemente a u.

Entonces para cada familia numerable $\mathcal{U} \subseteq \tau(K)$ se tiene que $\{u\} \neq \bigcap\{\overline{U} : U \in \mathcal{U}\}$, y por consiguiente u no es un π-punto en K.

Demostración. Supongamos que $U_n \in \tau(K)$ para todo $n \in \omega$ y $\{u\} = \bigcap\{\overline{U}_n : n \in \omega\}$; sin pérdida de generalidad podemos asumir que $U_0 = K$. Entonces $u \in \overline{U_n \cap Y}$, por lo que podemos escoger una sucesión $S_n \subseteq U_n \cap Y$ tal que S_n converge a u para cada $n \in \omega$. Por la propiedad $(*)$ podemos encontrar una sucesión $S \subseteq K$ que converge flexiblemente a u tal que $S \cap S_n$ es infinito para todo $n \in \omega$. Obsérvese que $G_x = \bigcap\{U_n : x \in U_n\}$ es un conjunto G_δ y $x \in G_x$ para cualquier $x \in S$.
Por nuestra elección de S, para cada $x \in S$ podemos tomar $y(x) \in G_x$ de tal manera que la sucesión $\{y(x) : x \in S\}$ converge a un punto $y \in K\backslash\{u\}$. Para cualquier $n \in \omega$ el conjunto $\{x \in S : x \in U_n\}$ es infinito, por lo que $S' = \{x \in S : y(x) \in U_n\}$ también es infinito. Lo anterior demuestra que $S' \subseteq U_n$ converge a y y por consiguiente $y \in \overline{U}_n$ para todo $n \in \omega$. De modo que $y \in \bigcap\{\overline{U}_n : n \in \omega\}$, por lo cual $\{u\} \neq \bigcap\{\overline{U}_n : n \in \omega\}$; esta contradicción muestra que $\{u\} \neq \bigcap\{\overline{U} : U \in \mathcal{U}\}$ para toda familia numerable $\mathcal{U} \subseteq \tau(K)$. ■

Proposición 2.4.7. Supongamos que $\varphi : \omega^\omega \to Z$ es un mapeo multivaluado y sobreyectivo que tiene la siguiente propiedad:

$(*)$ si $\{f_n : n \in \omega\}$ es una sucesión en ω^ω que converge a $f \in \omega^\omega$ y $z_n \in \varphi(f_n)$ para cada $n \in \omega$, entonces la sucesión $\{z_n : n \in \omega\}$ tiene un punto de acumulación $z \in \varphi(f)$.

Entonces el mapeo φ es superiormente semicontinuo.

Demostración. Sea $f \in \omega^\omega$ y supongamos que φ no es superiormente semicontinuo en f, esto es, existe $W \in \tau(\varphi(f), Z)$ tal que para cada $U \in \tau(f, \omega^\omega)$, el conjunto $\varphi(U)\backslash W$ es no vacío. Definamos $U_n = \{g \in \omega^\omega : g|n = f|n\}$ para todo $n \in \omega$; tomemos $f_n \in U_n$ para el cual $\varphi(f_n)\backslash W \neq \emptyset$ y $z_n \in \varphi(f_n)\backslash W$ para cada $n \in \omega$. Es claro que $\{f_n : n \in \omega\}$ converge a f, por lo cual existe un punto de acumulación $z \in \varphi(f)$ de $\{z_n : n \in \omega\}$. Sin embargo, $W \in \tau(z, Z)$

y $W \cap \{z_n : n \in \omega\} = \emptyset$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto φ es superiormente semicontinuo. ■

Teorema 2.4.8. Si K es un espacio compacto y $T \subseteq C_p(K)$ es un subespacio K-analítico que separa los puntos de K, entonces $C_p(K)$ es K-analítico.

Demostración. Dado un espacio compacto Z, denotemos por $C_u(Z)$ al conjunto $C(Z)$ con la topología de la convergencia uniforme. Para cada $f \in C_u(Z)$ y $\varepsilon > 0$ consideremos al conjunto $B(f, \varepsilon) = \{g \in C_u(Z) : sup\{|f(x) - g(x)| : x \in Z\} < \varepsilon\}$; es claro que la familia $\{B(f, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ forma una base local de $C_u(Z)$ en f.

Afirmación 1. Consideremos un espacio compacto Z. Si $s : C_u(Z) \times C_u(Z) \to C_u(Z)$ es el mapeo definido por $s(f, g) = f + g$ para cualesquiera $f, g \in C_u(Z)$, entonces s es continuo.

Si $f, g \in C_u(Z)$ y $U \in \tau(f + g, C_u(Z))$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f + g, \varepsilon) \subseteq U$. Es claro que $s(B(f, \frac{\varepsilon}{2}) \times B(g, \frac{\varepsilon}{2})) \subseteq B(f + g, \varepsilon) \subseteq U$, por lo que s es continua. □

Afirmación 2. Consideremos un espacio compacto Z. Si $p : C_u(Z) \times C_u(Z) \to C_u(Z)$ es el mapeo definido por $p(f, g) = f \cdot g$ para cualesquiera $f, g \in C_u(Z)$, entonces p es continuo.

Supongamos que $f, g \in C_u(Z)$ y $U \in \tau(f \cdot g, C_u(Z))$. Existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f \cdot g, \varepsilon) \subseteq U$. Hagamos $M = 2 + sup\{|f(x)| : x \in X\} + sup\{|g(x)| : x \in X\}$ y $\delta = min\{1, \frac{\varepsilon}{2M}\}$. Escojamos $x \in Z$, $g' \in B(g, \delta)$ y $f' \in B(f, \delta)$ arbitrarios; es claro que $|g'(x)| < 1 + |g(x)| < M$ y por consiguiente

$$\begin{aligned}|f'(x)g'(x) - f(x)g(x)| &= |g'(x)(f'(x) - f(x)) + f(x)(g'(x) - g(x))| \\ &\leq |g'(x)| \cdot |f'(x) - f(x)| + |f(x)| \cdot |g'(x) - g(x)| < 2M\delta \leq \varepsilon,\end{aligned}$$

lo que demuestra que $p(B(f, \delta) \times B(g, \delta)) \subseteq B(f \cdot g, \varepsilon) \subseteq U$. Por lo tanto, el mapeo p es continuo. □

Un subconjunto $A \subseteq C(Z)$ se llama álgebra, si $f, g \in A$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ implican que $f + g \in A$, $\alpha f \in A$ y $f \cdot g \in A$.

Afirmación 3. Si $Y \subseteq C_u(Z)$ es un subespacio K-analítico, entonces existe un álgebra $\langle Y \rangle \subseteq C_u(Z)$ que contiene a Y y es K-analítica.

Definamos a los mapeos $p_n : (C_u(Z))^n \to C_u(Z)$ y $s_n : (C_u(Z))^n \times \mathbb{R}^n \to C_u(Z)$ por $p_n(f_1, \ldots, f_n) = \prod_{i \leq n} f_i$ y $s_n(f_1, \ldots, f_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{i \leq n} \alpha_i f_i$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $(f_1, \ldots, f_n) \in (C_u(Z))^n$ y $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$; ambos mapeos son continuos por las afirmaciones 1 y 2. Por la Proposición 2.1.7, el conjunto $Y_p = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} p_n(Y^n)$ es K-analítico. Nuevamente, por la Proposición 2.1.7, el conjunto $\langle Y \rangle = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} s_n(Y_p^n \times \mathbb{R}^n)$ es K-analítico. Es fácil comprobar que $\langle Y \rangle$ es el álgebra prometida. □

Denotemos por o a la función cuyo valor es uno en cada punto de K. Por la Proposición 2.1.7, el conjunto $T' = T \cup \{o\}$ es K-analítico. Por la Afirmación 3, existe un álgebra $\langle T' \rangle \subseteq C_u(K)$ que contiene a T' y que es K-analítica. Por el teorema de Stone-Weierstrass, el espacio $\langle T' \rangle$ es denso en $C_u(K)$. Finalmente, por [Tk3, Corollary 2.5] el espacio $C_u(K)$ es K-analítico. ■

Teorema 2.4.9. Supongamos que A es un conjunto y $K \subseteq \Sigma(A)$ es un subspacio compacto para el cual existe una familia $\{A_s : s \in \omega^{<\omega}\}$ de subconjuntos de A con las siguientes propiedades:

(i) $A_\emptyset = A$ y $A_s = \bigcup\{A_{s^\frown n} : n \in \omega\}$ para cualquier $s \in \omega^{<\omega}$;

(ii) para cualesquiera $x \in K$ y $f \in \omega^\omega$ existe $m \in \omega$ tal que $A_{f|n} \cap x^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ es finito para todo $n \geq m$.

Entonces $C_p(K)$ es un espacio K-analítico.

Demostración. Sea $\chi_a : A \to \mathbb{D}$ la función característica del conjunto $\{a\}$ para cada $a \in A$, esto es, $\chi_a(a) = 1$ mientras $\chi_a(b) = 0$ para cualquier $b \in A \setminus \{a\}$; hagamos $z_0(a) = 0$ para

todo $a \in A$. El conjunto $L_0 = \{z_0\} \cup \{\chi_a : a \in A\}$ es compacto, por lo que $K' = K \cup L_0 \supseteq K$ también es compacto; como $C_p(K)$ es una imagen continua de $C_p(K')$, es suficiente demostrar que $C_p(K')$ es K-analítico. Puesto que la propiedad (ii) se satisface para K', podemos asumir sin pérdida de generalidad que $K' = K$, esto es, $L_0 \subseteq K$.
Para cualquier $x \in \Sigma(A)$ hagamos $supp(x) = x^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$. Denotemos por u a la función cuyo valor es cero en cada punto de K. Para cada $a \in A$, hagamos $e_a(x) = x(a)$ para todo $x \in K$; entonces $e_a \in C_p(K)$ puesto que e_a coincide con la restricción a K de la proyección natural de $\mathbb{R}^A$ sobre el factor determinado por a. Como $T = \{u\} \cup \{e_a : a \in A\}$ separa los puntos de K, por el Teorema 2.4.8 es suficiente demostrar que T es K-analítico. Notemos que $W_a = \{v \in C_p(K) : v(\chi_a) > 0\}$ es una vecindad abierta de e_a en $C_p(K)$ tal que $W_a \cap T = \{e_a\}$; por eso cada e_a es un punto aislado de T.
Para cada $s \in \omega^{<\omega}$ definamos $Q_s = \{u\} \cup \{e_a : a \in A_s\}$; entonces cada Q_s es cerrado en T y por consiguiente, para todo $f \in \omega^\omega$, el conjunto $P_f = \bigcap\{Q_{f|n} : n \in \omega\}$ también es cerrado. Haciendo $\varphi(f) = P_f$ para cualquier $f \in \omega^\omega$, obtenemos un mapeo multivaluado $\varphi : \omega^\omega \to T$. Resulta que P_f es compacto para cada $f \in \omega^\omega$, esto es, φ es compacto-valuado.
Para demostrarlo, tomemos cualquier $U \in \tau(u, C_p(K))$; existen $F \in [K]^{<\omega}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $W = \{v \in C_p(K) : |v(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in F\} \subseteq U$. Consideremos al conjunto $C = \bigcup\{x^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\}) : x \in F\}$. Se sigue de (ii) que existe $m \in \omega$ para el cual $C \cap A_{f|m}$ es finito y por consiguiente $e(F) \subseteq \{0\}$ para cada $e \in Q_{f|m}$ salvo una cantidad finita de ellos. Puesto que $P_f \subseteq Q_{f|m}$, se tiene que $e(F) \subseteq \{0\}$ para cada $e \in P_f$ salvo una cantidad finita de ellos. Entonces $P_f\backslash U \subseteq P_f\backslash W$ es finito, esto es, encontramos un punto $u \in P_f$ tal que $P_f\backslash U$ es finito para cada vecindad abierta U de u en $C_p(K)$. Por tanto P_f es un espacio compacto con máximo un punto no aislado, lo que muestra que el mapeo φ es compacto-valuado.
Dado cualquier punto $a \in A$, por la propiedad (i) existe una función $f \in \omega^\omega$ tal que $a \in \bigcap\{A_{f|n} : n \in \omega\}$, lo que muestra que $e_a \in P_f$ y por consiguiente que $\{P_f : f \in \omega^\omega\}$ es una cubierta de T.
Ahora supongamos que una sucesión $S = \{f_n : n \in \omega\} \subseteq \omega^\omega$ converge a $f \in \omega^\omega$ y $t_n \in P_{f_n}$ para cada $n \in \omega$. Pasando a una subsucesión de S de ser necesario, podemos asumir, sin pérdida de generalidad que $f_n|n = f|n$ y por tanto que $t_n \in Q_{f|n}$ para cada $n \in \omega$.
Si existe un punto $t \in T$ tal que $t = t_n \in Q_{f|n}$ para una cantidad infinita de $n \in \omega$, entonces $t \in P_f$ es un punto de acumulación de S. De no ser el caso, pasando a una subsucesión de S de ser necesario, podemos asumir que $t_n \neq t_m$ si $n \neq m$. Para ver que $\{t_n : n \in \omega\}$ converge a u, tomemos cualquier $x \in K$; existe $m \in \omega$ para el cual el conjunto $D = supp(x) \cap A_{f|m}$ es finito. Tenemos que $\{t_n : n \geq m\} \subseteq Q_{f|m}$ y $t_n = e_{a_n}$ con $a_n \in A_{f|m}$ para cada $n \geq m$. Por tanto $t_n(x) = x(a_n) = 0$ para todo $n \geq m$ tal que $a_n \notin D$. Esto demuestra que $t_n(x) = 0$ para todo $n \in \omega$ salvo una cantidad finita de ellos y por consiguiente la sucesión $\{t_n : n \in \omega\}$ converge a $t = u \in P_f$.
Hemos verificado que en cada caso, existe un punto de acumulación $t \in P_f$ para el conjunto $\{t_n : n \in \omega\}$, por lo que podemos aplicar la Proposición 2.4.7 para concluir que T es K-analítico. ■

Teorema 2.4.10. Existe un espacio compacto K con las siguientes propiedades:
(i) $C_p(K)$ es K-analítico, esto es, K es un compacto de Talagrand;
(ii) existe un punto $u \in K$ tal que para cualquier familia $\{U_n : n \in \omega\} \subseteq \tau(K)$ se tiene que $\{u\} \neq \bigcap\{\overline{U_n} : n \in \omega\}$, por lo que u no es un π-punto;
(iii) $K = \bigcup\{K_n : n \in \omega\}$ donde la familia $\{K_n : n \in \omega\}$ es disjunta, $K_0 \simeq A(\mathfrak{c})$ y u es el único punto no aislado de K_0; además, para todo $n \in \mathbb{N}$ el subespacio K_n es abierto-cerrado en K y homeomorfo a un subconjunto cerrado de $(A(\mathfrak{c}))^\omega$.

Demostración. Para cualesquiera $\alpha, \beta \leq \omega_1$, los intervalos de ordinales están definidos en el modo usual, esto es, $[\alpha, \beta] = \{\gamma \leq \omega_1 : \alpha \leq \gamma \leq \beta\}$, $[\alpha, \beta) = \{\gamma < \omega_1 : \alpha \leq \gamma < \beta\}$;

análogamente, $(\alpha, \beta) = \{\gamma < \omega_1 : \alpha < \gamma < \beta\}$. Hagamos $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ y denotemos por T al conjunto $(\{0\} \times \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}) \cup ((0, \omega_1) \times I)$. Así $T \subseteq [0, \omega_1) \times I$; denotemos por $\pi : T \to [0, \omega_1)$ a la proyección natural de T en el factor $[0, \omega_1)$. Es claro que $a_n = (0, \frac{1}{n}) \in T$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Llamemos a un conjunto $G \subseteq T$ *delgado* si $\pi|G$ es inyectiva y denotemos por $\mathcal{F}$ a la familia de todos los subconjuntos delgados no vacíos y finitos de T.

Hagamos $\mathcal{A}_0 = \{\{a_n\} : n \in \mathbb{N}\}$; es evidente que $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{F}$. Supongamos que $\alpha < \omega_1$ y tenemos familias $\{\mathcal{A}_\beta : \beta < \alpha\}$ con las siguientes propiedades:

(1) $\mathcal{A}_\beta \subseteq \mathcal{F}$ y $|\mathcal{A}_\beta| \leq \mathfrak{c}$ para todo $\beta < \alpha$;

(2) si $\beta < \alpha$ y $A \in \mathcal{A}_\beta$, entonces $\{0, \beta\} \subset \pi(A)$ y $A \subset \pi^{-1}([0, \beta])$;

(3) para cada $\beta \in (0, \alpha)$ y $r \in I$, la familia $\mathcal{A}_\beta^r = \{A \in \mathcal{A}_\beta : (\beta, r) \in A\}$ es infinita y numerable, mientras que la colección $\mathcal{B}_\beta^r = \{A \backslash \{(\beta, r)\} : A \in \mathcal{A}_\beta^r\}$ es disjunta y contenida en $\bigcup\{\mathcal{A}_\gamma : \gamma < \beta\}$;

(4) si $\beta \in (0, \alpha)$ y $\mathcal{C} \subseteq \bigcup\{\mathcal{A}_\gamma : \gamma < \beta\}$ es una familia infinita numerable y disjunta, entonces existen $\mathfrak{c}$ puntos $r \in I$ tales que $\mathcal{A}_\beta^r = \{C \cup \{(\beta, r)\} : C \in \mathcal{C}\}$.

Definamos $\mathbb{M} = \{\mathcal{C} \subset \bigcup\{\mathcal{A}_\beta : \beta < \alpha\} : \mathcal{C}$ es una familia infinita numerable y disjunta$\}$; es claro que $|\mathbb{M}| \leq \mathfrak{c}$ por lo que existe un mapeo $g : I \to \mathbb{M}$ tal que $|g^{-1}(\mathcal{C})| = \mathfrak{c}$ para cada $\mathcal{C} \in \mathbb{M}$. La familia $\mathcal{A}_\alpha^r = \{C \cup \{(\alpha, r)\} : C \in g(r)\}$ es numerable para todo $r \in I$, por lo que la colección $\mathcal{A}_\alpha = \bigcup\{\mathcal{A}_\alpha^r : r \in I\}$ tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$.

Es inmediato que las condiciones (1)-(4) también se satisfacen para cada $\beta \leq \alpha$, por lo que nuestro proceso inductivo nos da una colección $\{\mathcal{A}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ para la cual las propiedades (1)-(4) se satisfacen para todo $\beta < \omega_1$; hagamos $\mathcal{A} = \bigcup\{\mathcal{A}_a : \alpha < \omega_1\}$. Se sigue de (2) que, para cada $A \in \mathcal{A}$ existe un único par $(\alpha, r) \in \omega_1 \times I$ tal que $A \in \mathcal{A}_\alpha^r$; diremos que el punto $t = (\alpha, r) \in A$ es el elemento *maximal* de A y lo denotaremos por $max(A)$.

Dado un conjunto $A \subseteq T$, la función característica $\chi_A \in \mathbb{D}^T$ del conjunto A esta definida por $\chi_A(t) = 1$ si $t \in A$ y $\chi_A(t) = 0$ para cada $t \in T \backslash A$. Hagamos $u = \chi_\emptyset$ y consideremos al conjunto $Y = \{\chi_A : A \in \mathcal{A}\}$; demostraremos que el espacio compacto $K = \overline{Y}$ (la barra denota la cerradura en $\mathbb{D}^T$) es como se prometió.

Notemos que $\{a_n\} \in \mathcal{A}$ y por tanto $\chi_{\{a_n\}} \in Y$ para cada $n \in \mathbb{N}$; si $\alpha > 0$ y $r \in I$, entonces por (3), la sucesión $\{\chi_A : A \in \mathcal{A}_\alpha^r\}$ converge a $\chi_{\{(\alpha, r)\}}$.

Por lo tanto

(5) $\chi_t \in K$ para todo $t \in T$.

Es inmediato que u pertenece a la cerradura del conjunto $\{\chi_{\{t\}} : t \in T\}$ y en consecuencia $u \in K$. Es importante notar que

(6) el conjunto $supp(x) = x^{-1}(1)$ es delgado para cada $x \in K$.

En efecto, si $r_1 \neq r_2$, $t_1 = (\alpha, r_1)$, $t_2 = (\alpha, r_2)$ y $\{t_1, t_2\} \subseteq supp(x)$, entonces se sigue de $x \in \overline{Y}$ que existe $A \in \mathcal{A}$ para el cual $\chi_A(t_i) = 1$ para cada $i \in \{1, 2\}$, esto es, $\{t_1, t_2\} \subseteq A$ lo que es una contradicción con $A \in \mathcal{F}$. Esto demuestra (6).

A continuación demostraremos que $K \subseteq \Sigma(\mathbb{D}^T)$ y por consiguiente K es un compacto de Corson. Tomemos un elemento arbitrario $A \in \mathcal{A}$; entonces $A \in \mathcal{A}_\alpha$ para algún $\alpha < \omega_1$, por lo que $(\alpha, r) \in A$ para algún $r \in I$. Si $\alpha > 0$, entonces se sigue de (3) que $A \backslash \{(\alpha, r)\} \in \mathcal{A}$; procediendo de modo inductivo (esto es, en cada paso eliminamos el elemento maximal), notamos que eliminar sucesivamente elementos maximales es lo mismo que considerar al conjunto $\pi^{-1}([0, \beta]) \cap A$ para algún $\beta < \omega_1$. Por tanto

(7) para cualesquiera $A \in \mathcal{A}$ y $\beta < \omega_1$, el conjunto $\pi^{-1}([0, \beta]) \cap A$ pertenece a $\mathcal{A}$.

La siguiente propiedad de la familia $\mathcal{A}$ es crucial.

(8) si $A, B \in \mathcal{A}$ y $\{t_1, t_2\} \subseteq A \cap B$ para algunos $t_1, t_2 \in T$, tales que $\beta = \pi(t_1) < \alpha = \pi(t_2)$, entonces $\pi^{-1}([0, \alpha]) \cap A = \pi^{-1}([0, \alpha]) \cap B$.

Para ver que se cumple la propiedad (8), notemos que $A' = \pi^{-1}([0, \alpha]) \cap A \in \mathcal{A}$ y

$B' = \pi^{-1}([0,\alpha]) \cap B \in \mathcal{A}$ por (7). Existe $r \in I$ con $t_2 = (\alpha, r) \in A' \cap B'$, por lo que se sigue de (2) que $A', B' \in \mathcal{A}^r_\alpha$; la familia $\mathcal{B}^r_\alpha$ es disjunta por (3) y los conjuntos $A' \backslash \{t_2\}$ y $B' \backslash \{t_2\}$ pertenecen a $\mathcal{B}^r_\alpha$. Del hecho que $t_1 \in (B' \backslash \{t_2\}) \cap (A' \backslash \{t_2\})$ se tiene que $A' = B'$, por lo que la propiedad (8) queda demostrada.

Ahora supongamos que $A = supp(x)$ es no numerable para algún $x \in K$. Entonces existe $\alpha \in \pi(A)$ tal que $\pi(A) \cap [0,\alpha]$ es infinito; tomemos $t = (\alpha, r) \in A$ y $s = (\beta, q) \in A$ con $\beta < \alpha$. El conjunto $O = \{y \in \mathbb{D}^T : y(s) = y(t) = 1\}$ es una vecindad abierta del punto $x \in \mathbb{D}^T$, por lo que se sigue de $x \in \overline{Y}$ que $x \in \overline{Y \cap O}$. Consideremos al conjunto $\mathcal{U} = \{B \in \mathcal{A} : \{t, s\} \subseteq B\}$; es evidente que $Y_0 = Y \cap O = \{\chi_B : B \in \mathcal{U}\}$. Por (8), existe un conjunto finito $H \subsetneq \pi^{-1}([0,\alpha])$ para el cual $B \cap \pi^{-1}([0,\alpha]) = H$ para todo $B \in \mathcal{U}$. Puesto que $\pi(A) \cap [0,\alpha]$ es infinito, podemos escoger $\gamma \in (\pi(A) \cap [0,\alpha]) \backslash \pi(H)$. Si $t' \in A$ y $\pi(t') = \gamma$, entonces existe $y = \chi_B \in Y_0$ tal que $y(t') = 1$, lo que muestra que $B \in \mathcal{U}$ mientras que $t' \in (B \cap \pi^{-1}([0,\alpha]) \backslash H$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $A = x^{-1}(1)$ es numerable para cada $x \in K$ y en consecuencia $K \subseteq \Sigma(\mathbb{D}^T)$ es un compacto de Corson.

Para demostrar que el espacio $C_p(K)$ es K-analítico consideremos, para cualesquiera $m, n \in \omega$, al conjunto $S^m_n = \{t = (\alpha, r) \in T : a_{n+1} \notin A$ para cada $A \in \mathcal{A}_\alpha$ con $t \in A$ o existe $A \in \mathcal{A}_\alpha$ tal que $t \in A$, $a_{n+1} \in A$ y $|A| = m+1\}$. Sea $T_\emptyset = T$; si $s \in \omega^{<\omega}$ y $dom(s) = \{0, \ldots, m-1\}$ para algún $m \in \mathbb{N}$, entonces hagamos $T_s = S^{s(0)}_0 \cap \ldots \cap S^{s(m-1)}_{m-1}$. Verificaremos que la familia $\mathcal{T} = \{T_s : s \in \omega^{<\omega}\}$ satisface las condiciones (i) y (ii) del Teorema 2.4.9.

Fijemos $s \in \omega^{<\omega}$ y $t = (\alpha, r) \in T_s$; si $s \in \omega^n$ y $a_{n+1} \notin A$ para cada $A \in \mathcal{A}$ con $max(A) = t$, entonces $t \in S^0_n \cap T_s = T_{s \frown 0}$. Si existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $max(A) = t$ y $a_{n+1} \in A$, entonces $t \in S^m_n \cap T_s = T_{s \frown m}$ para $m = |A| - 1$. Esto muestra que $T_s = \bigcup \{T_{s \frown k} : k \in \omega\}$ para cada $s \in \omega^{<\omega}$, esto es, la familia $\mathcal{T}$ satisface (i) del Teorema 2.4.9.

Para probar que también se satisface la condición (ii) del Teorema 2.4.9, tomemos $x \in K$ y $f \in \omega^\omega$; si $|supp(x)| < \omega$, entonces no hay nada que demostrar por lo que podemos aplicar (6) para fijar $t, s \in supp(x)$ tales que $0 < \pi(t) < \pi(s)$. Como $x \in \overline{Y}$, existe $A \in \mathcal{A}$ con $\chi_A(t) = \chi_A(s) = x(s) = x(t) = 1$ y por consiguiente $\{s, t\} \subseteq A$. Por (2) y (6), existe un único $m \in \omega$ con $a_{m+1} \in A$. Afirmamos que

(9) $|S^k_m \cap supp(x)| \leq 1$ para cada $k \in \omega$.

Supongamos, para obtener una contradicción que (9) es falso; puesto que $supp(x)$ es un conjunto delgado por (6), existen $s', t' \in supp(x) \cap S^k_m$ tales que $\alpha = \pi(s') < \beta = \pi(t')$. Se sigue de $x \in \overline{Y}$ que existe $B \in \mathcal{A}$ para el cual $\{t, s, t', s'\} \subseteq B$. La propiedad (8) implica que $a_{m+1} \in B$; además, $D = \pi^{-1}([0,\beta]) \cap B \in \mathcal{A}$ por (7) y $t' = max(D)$. Si $D' \in \mathcal{A}$, $a_{m+1} \in D'$ y $t' = max(D')$, entonces $D' = D$ (ver (8)), por lo que se sigue de $t' \in S^k_m$ que $|D| = k+1$. Análogamente, $E = \pi^{-1}([0,\alpha]) \cap B \in \mathcal{A}$ mientras $a_{m+1} \in E$ y $max(E) = s'$. De nuevo, $s' \in S^k_m$ implica que $|E| = k+1$; sin embargo, esto da una contradicción porque $E \subseteq D$ y $E \neq D$, así que es imposible que $|D| = |E| = k+1$. Por consiguiente hemos establecido la propiedad (9) y en consecuencia $|supp(x) \cap T_{f|(m+1)}| \leq |supp(x) \cap S^{f(m)}_m| \leq 1$; como $T_{f|n} \subseteq T_{f|(m+1)}$ para todo $n \geq m+1$, la condición (ii) del Teorema 2.4.9 también se satisface para $\mathcal{T}$. De modo que, el espacio $C_p(K)$ es K-analítico por el Teorema 2.4.9.

Para probar que el punto $u \in K$ satisface la condición (ii) de este teorema, es suficiente mostrar que el conjunto $Y \subseteq K$ tiene la propiedad $(*)$ de la Proposición 2.4.6. Supongamos que $S_n \subseteq Y$ es una sucesión que converge a u para cada $n \in \omega$. Por la Proposición 2.4.5, existe una sucesión $S \subseteq Y$ para la cual $S \cap S_n$ es infinita para todo $n \in \omega$ y la familia $\{supp(x) : x \in S\}$ es disjunta. Para ver que S converge flexiblemente a u, hagamos $B_x = supp(x)$ y supongamos que G_x es un conjunto G_δ de K con $x \in G_x$ para cualquier $x \in S$. Haciendo cada G_x más pequeño de ser necesario, podemos asumir que existe un conjunto numerable $A_x \subseteq T \backslash B_x$ tal que $G_x = \{y \in K : B_x \subseteq supp(y) \subseteq T \backslash A_x\}$.

El conjunto $A = \bigcup \{A_x : x \in S\}$ es numerable así como la familia $\mathcal{C} = \{B_x : x \in S\} \subseteq \mathcal{A}$;

existe $\alpha < \omega_1$ tal que $\mathcal{C} \subseteq \bigcup\{\mathcal{A}_\beta : \beta < \alpha\}$ y $A \subseteq \pi^{-1}([0, \alpha])$, por lo que se sigue de (4) que $\mathcal{A}^r_\alpha = \{C \cup \{(\alpha, r)\} : C \in \mathcal{C}\}$ para algún $r \in I$.
Tenemos que $B_x \subseteq E_x = B_x \cup \{(\alpha, r)\} \subseteq T\backslash A_x$ y por tanto $y_x = \chi_{E_x} \in G_x$ para cada $x \in S$. Es claro que la sucesión $\{y_x : x \in S\} = \{\chi_B : B \in \mathcal{A}^r_\alpha\}$ converge a $y = \chi_{\{(\alpha,r)\}} \neq u$ y por consiguiente S converge flexiblemente a u mismo que, junto con la Proposición 2.4.5 muestra que la propiedad (ii) queda probada.
Para probar que la propiedad (iii) se satisface para K, notemos que el subespacio $K_0 = \{u\} \cup \{\chi_{\{t\}} : t \in (0, \omega_1) \times I\} \subseteq K$ es homeomorfo al espacio $A(\mathfrak{c})$. Consideremos a las familias $\mathcal{A}_n = \{A \in \mathcal{A} : a_n \in A\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$; entonces $\mathcal{A} = \bigcup\{\mathcal{A}_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\mathcal{A}_n \cap \mathcal{A}_m = \emptyset$ si $n \neq m$.
Si $Y_n = \{\chi_A : A \in \mathcal{A}_n\}$ y $K_n = \overline{Y_n}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, entonces $K_n \subseteq K$ es compacto. El conjunto $U_n = \{x \in K : x(a_n) = 1\}$ es abierto-cerrado en K y es inmediato que $K_n = U_n$, por lo que K_n es abierto-cerrado en K para cada $n \in \mathbb{N}$. Es evidente que la familia $\{K_n : n \in \omega\}$ es disjunta.
Para ver que $K = \bigcup_{n\in\omega} K_n$, tomemos cualquier $x \in K\backslash K_0$; si $x = \chi_{\{a_n\}}$ para algún número natural n, entonces $x \in K_n$. En caso contrario, existen $t, s \in supp(x)$ tales que $\pi(t) < \pi(s)$. Como $x \in \overline{Y}$, existe $B \in \mathcal{A}$ tal que $\{t, s\} \subseteq B$; existe un único $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \in B$. Se sigue de (8) que $A \in \mathcal{A}_n$ para cada $A \in \mathcal{A}$ con $\{t, s\} \subseteq A$. El conjunto $O = \{y \in K : y(t) = y(s) = 1\}$ es abierto en K y $x \in O$, por lo que $x \in \overline{Y \cap O}$. Pero $Y \cap O = \{\chi_A : A \in \mathcal{A}$ y $\{t, s\} \subseteq A\} \subseteq Y_n$, así que $x \in \overline{Y_n} = K_n$. Por lo tanto, $K = \bigcup_{n\in\omega} K_n$.
Ahora fijemos $m \in \mathbb{N}$; para probar que K_m es homeomorfo a un subespacio cerrado de $(A(\mathfrak{c}))^\omega$, consideremos al conjunto $R = \bigcup\{supp(x) : x \in K_m\} = \bigcup\{supp(x) : x \in Y_m\}$. Para cada $t = (\alpha, r) \in R$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $\{a_m, t\} \subseteq A$, por lo que se sigue de (8) que el conjunto $A' \cap \pi^{-1}([0, \alpha])$ es el mismo para cada $A' \in \mathcal{A}_m$ con $t \in A'$. Entonces el número $\mu(t) = |A \cap \pi^{-1}([0, \alpha])|$ esta bien definido y sólo depende de t. Hagamos $R_n = \{t \in R : \mu(t) = n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $R = \bigcup\{R_n : n \in \mathbb{N}\}$ y la familia $\{R_n : n \in \mathbb{N}\}$ es disjunta. Además,

(10) $|supp(x) \cap R_n| \leq 1$ para cada $x \in K_m$ y $n \in \mathbb{N}$.

Como Y_m es denso en K_m es suficiente demostrar (10) para cada $x \in Y_m$. Supongamos que $x \in Y_m$, $t, s \in supp(x)$ mientras $\alpha = \pi(t) < \beta = \pi(s)$ y $\{t, s\} \subseteq R_n$. El conjunto $A = supp(x)$ pertenece a $\mathcal{A}_m$; hagamos $B = A \cap \pi^{-1}([0, \beta])$ y $C = A \cap \pi^{-1}([0, \alpha])$. Se sigue de $s \in A \cap R_n$ que $|B| = n$; puesto que $t \in R_n$, tenemos que $|C| = n$, lo que es imposible porque B y C son conjuntos finitos y distintos con $C \subseteq B$. Esta contradicción muestra que la condición (10) se satisface.
Denotemos por $\pi_R : \mathbb{D}^T \to \mathbb{D}^R$ la proyección de $\mathbb{D}^T$ sobre su cara $\mathbb{D}^R$; análogamente para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos por π_{R_n} a la proyección de $\mathbb{D}^T$ sobre su cara $\mathbb{D}^{R_n}$. Es fácil ver que $\pi_R|K_m : K_m \to \pi_R(K_m)$ es un homeomorfismo. Además, $\pi_R(K_m)$ es homeomorfo a un subconjunto cerrado del producto $\prod\{\pi_{R_n}(K_m) : n \in \mathbb{N}\}$. Dado $t \in R_n$ sea $\nu_t \in \mathbb{D}^{R_n}$ la función característica de $\{t\}$ y denotemos por w_n a la función cuyo valor es cero en cada punto de R_n. Por la propiedad (10), para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $\pi_{R_n}(K_m) \subseteq L_n = \{w_n\} \cup \{\nu_t : t \in R_n\}$. Puesto que cada L_n puede ser encajado en $A(\mathfrak{c})$ como un subespacio cerrado, el espacio K_m se encaja en $(A(\mathfrak{c}))^\omega$ para todo $m \in \omega$. Por lo tanto la propiedad (iii) queda demostrada. ■

Ejemplo 2.4.11. Sea K el espacio compacto cuya existencia se demostro en el Teorema 2.4.10. La propiedad (i) del Teorema 2.4.10 establece que $C_p(K)$ is K-analítico. La propiedad (ii) del Teorema 2.4.10 junto con el Teorema 2.4.4 implican que existe un punto $x \in K$ tal que $K\backslash\{x\}$ es pseudocompacto y K es la extensión de Stone-Čech de $K\backslash\{x\}$. Por [Tk7, Fact 19, S.351], el espacio K no es un compacto de Eberlein, es decir, $C_p(K)$ no tiene un subconjunto denso σ-compacto.
Sea $P = K\backslash\{x\}$. El mapeo restricción $\pi_P : C_p(K) \to C_p(P)$ es sobreyectivo por lo que $Z = C_p(P)$ es un espacio K-analítico y por lo tanto Lindelöf Σ. Como P se encaja en

$C_p(Z)$, vemos que un espacio pseudocompacto de $C_p(Z)$ donde Z es Lindelöf Σ, no necesita ser compacto. De modo que la conclusión del Teorema 2.2.16 no es válida cuando Y es pseudocompacto. Por otro lado, del teorema de Grothendieck (véase [Gro]) se sigue que si X es compacto y $Y \subseteq C_p(X)$ es pseudocompacto, entonces Y es un compacto de Eberlein. Aquí vemos una diferencia muy fina entre los espacios que se encajan en $C_p(X)$ para X compacto y los que se encajan en $C_p(L)$ donde L es un espacio Lindelöf Σ.

Conclusiones y perspectivas

En esta tesis se estudió la propiedad Lindelöf Σ tanto en espacios topológicos generales como en espacios de funciones con la topología de la convergencia puntual con el propósito de presentar generalizaciones de varios resultados clásicos sobre espacios compactos a los espacios Lindelöf Σ. En el caso de los espacios generales presentamos catorce definiciones equivalentes a la propiedad Lindelöf Σ, con lo que pudimos apreciar entre otras cosas, que dicha propiedad generaliza los conceptos de compacidad y K-analiticidad. Se vio que todo espacio Lindelöf Σ es un D-espacio y cualquier producto de espacios Lindelöf Σ es estable, mismos que son resultados de Buzyakova y Arhangel'skii respectivamente; cabe mencionar que ambas propiedades tienen una demostración fácil en el caso de espacios compactos, pero presentan cierta dificultad para los espacios Lindelöf Σ.
Se presentaron algunas condiciones para determinar cuando un espacio Lindelöf Σ tiene peso de red numerable, como los teoremas de Gruenhage en los que se establece que todo espacio Lindelöf Σ con diagonal G_δ tiene peso de red numerable y bajo la Hipótesis del Continuo, todo espacio Lindelöf Σ con diagonal pequeña tiene peso de red numerable. Además, se demostró un teorema de Hodel que estipula que un espacio es hereditariamente Lindelöf Σ si y sólo si tiene peso de red numerable.
En el caso de los espacios de funciones se vio el teorema de Okunev sobre la t-invariabilidad de la σ-compacidad, K-analiticidad y la propiedad Lindelöf Σ. Se presentó también el teorema de Baturov sobre la igualdad entre el extent y el número de Lindelöf de cualquier subespacio de $C_p(X)$ si X es Lindelöf Σ; dicho resultado es una generalización de un teorema clásico de Grothendieck, por lo que tiene muchas aplicaciones en Análisis Funcional y Topología. En esta tesis se encuentra otro resultado famoso de Okunev sobre la propiedad Lindelöf Σ de $C_p(Y)$ cuando $Y \subseteq C_p(X)$ y X es Lindelöf Σ y un teorema de Tkachuk que da una descripción completa de la distribución de la propiedad Lindelöf Σ en espacios de funciones iterados. El último resultado es un sobresaliente ejemplo de Reznichenko de un compacto de Talagrand que es una unión numerable de compactos de Eberlein, que falla en ser un compacto de Eberlein. De este resultado se sigue que existe una diferencia muy fina entre los espacios que se encajan en $C_p(X)$ cuando X es compacto ó Lindelöf Σ. Dicho ejemplo también tiene muchas otras aplicaciónes tanto en Análisis Funcional como en Topología.
A continuación se presentan siete problemas abiertos con temas relacionados a los resultados que se expusieron en esta tesis:

1) Supongamos que $\upsilon(C_p(X))$ es un espacio Lindelöf Σ. ¿Es cierto que $\upsilon(C_p(C_p(X)))$ es Lindelöf Σ?

2) Supongamos que X es un espacio Lindelöf Σ con un único punto no aislado. ¿Debe $C_p(X)$ ser Lindelöf Σ?

3) Supongamos que $s(X) = \omega$ y $C_pC_p(X)$ es un espacio Lindelöf Σ. ¿Debe el espacio X tener peso de red numerable?

4) Supongamos que $C_p(X)$ es un espacio Lindelöf Σ y $\psi(X) = \omega$ (o incluso $\chi(X) = \omega$). ¿Es cierto que $|X| \leq \mathfrak{c}$?

5) Se sabe que $C_p(X)$ se encaja en un espacio Lindelöf Σ de estrechez numerable. ¿Debe X ser Lindelöf Σ?

6) Supongamos que $C_p(X)$ es Lindelöf Σ. ¿Es cierto que cada $Y \subseteq C_p(X)$ es metalindelöf?

7) Supongamos que $C_p(X)$ es Lindelöf Σ. ¿Es cierto que cada $Y \subseteq C_p(X)$ es un D-espacio?

Bibliografía

[Ar1] A.V. Arhangel'skii, *The structure and classification of topological spaces and cardinal invariants (in Russian)*, Uspehi Mat. Nauk, **33:6**(1978), 29-84.

[Ar2] A.V. Arhangel'skii, A survey of C_p-theory, *Questions and Answers in General Topology*, **5**(1987), 1-109.

[Ar3] A.V. Arhangel'skii, Some results and problems in C_p-theory, *General Topology and Its Relations to Modern Analysis and Algebra*, **VI**, Heldermannn Verlag, Berlin, 1988, 11-31.

[Ar4] A.V. Arhangel'skii, Problems in C_p-theory, *Open Problems in Topology*, North Holland, Amsterdam, 1990, 603-615.

[Ar5] A.V. Arhangel'skii, *Topological Function Spaces*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1992.

[Ar6] A.V. Arhangel'skii, C_p-theory, *Recent Progress in General Topology*, M. Hušek and J. van Mill eds., Elsevier S. P., 1992, 1-56

[Ar7] A.V. Arhangel'skii, *On Lindelöf property and spread in C_p-theory*, Topol. and Its Appl., **74:(1-3)**(1996), 83-90.

[Ar8] A.V. Arhangel'skii, *Some observations on C_p-theory and bibliography*, Topology Appl., **74:(1-3)**(1996), 83-90.

[AB] A.V. Arhangel'skii y R.Z. Buzyakova, *Addition theorems and D-spaces*, Comment. Math. Univ. Carolin., **43:4**(2002), 653-663.

[Ba] D.P. Baturov, *On subspaces of function spaces*, Vestnik MGU, Matematika, Mech., **42:4**(1987), 66-69.

[BW] C.R. Borges y A.C. Wehrly, *A study of D-spaces*, Topology Proc., **16**(1991), 7-15.

[Bu1] R.Z. Buzyakova, *On D-property of strong Σ-spaces*, Comment. Math. Univ. Carolin., **43:3**(2002), 493-495.

[Bu2] R.Z. Buzyakova, *Hereditary D-property of function spaces over compacta*, Proc. Amer. Math. Soc., **132:11**(2004), 3433-3439.

[Bu3] R.Z. Buzyakova, *In search for Lindelöf C_p*, Comment. Math. Univ. Carolin., **45:1**(2004), 145-151.

[CLM] F. Casarrubias, M. López, P. Mendoza, R. Ramírez, V.V. Tkachuk, *Los espacios Lindelöf Σ y sus aplicaciones.* Aportaciones Mat., Ser. Comunicaciones, **27**(2000), 397-301.

[COT] B. Cascales, J. Orihuela y V.V. Tkachuk, *Domination by second countable spaces and*

Lindelöf Σ-property, Topology Appl., **158**(2011), 204-214.

[Dow] A. Dow, *An empty class of nonmetric spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **104:3**(1988).

[DJP] A. Dow, H. Junnila y J. Pelant, *Weak covering properties of weak topologies*, Proc. London Math. Soc., **75**(1997), 349-368.

[Ei] T. Eisworth, On D-spaces, en *Open Problems in Topology II*, E. Pearl ed., Elsevier B. V., Amsterdam, 2007, 129-134.

[En] R. Engelking, *General Topology*, PWN, Warszawa, 1977.

[Fa] M. Fabian, *Gateaux Differentiability of Convex Functions and Topology, Weak Asplund Spaces*, Wiley, New York, 1997.

[GK] S.P. Gul'ko y T.E. Khmyleva, *Compactness is not preserved by the t-equivalence relation*, Math. Note, **39:6**(1986), 484-488.

[Gro] A. Grothendieck, *Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux*, Amer. J. Math., **74**(1952), 168-186.

[Gr1] G. Gruenhage, Generalized Metric Spaces, en *Handbook of Set-Theoretic Topology*, K. Kunen and J. E. Vaughan, eds., North Holland, Amsterdam, 1984, 423-501.

[Gr2] G. Gruenhage, *A note on Gul'ko compact spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **100**(1987), 371-376.

[Gr3] G. Gruenhage, *Spaces having a small diagonal*, Topology and its Applications. **122:1-2**(2002), 183-200.

[Gr4] G. Gruenhage, *A note on D-spaces*, Topology Appl., **153**(2006), 2229-2240.

[Gu] S.P. Gulko, *On the structure of spaces of continuous functions and their hereditary paracompactness (in Russian)*, Uspehi Matem. Nauk, **34:6**(1979), 33-40.

[HT] C. Hernández y M. Tkachenko, *A note on ω-modification and completeness concepts*, Bol. Soc. Mat. Mexicana, **8:3**(2002), 93-96.

[Ho1] R.E. Hodel, *On a theorem of Arhangel'skii concerning Lindelöf p-spaces*, Canad. J. Mat., **27**(1975), 459-468.

[Ho2] R.E. Hodel, Cardinal Functions I, en *Handbook of Set-Theoretic Topology*, K. Kunen and J. E. Vaughan eds., North Holland, Amsterdam, 1984, 1-61.

[KOS] W. Kubiś, O. Okunev y P.J. Szeptycki, *On d-separability of powers and $C_p(X)$*, Topology Appl., **155:4**(2008), 277-281.

[Ku] K. Kunen, *Set Theory, An Introduction to Independence Proof*, North-Holland, 1992.

[Ma] W. Marciszewski, *On analytic and coanalytic function spaces C_p-theory*, Topology and Its Appl., **50**(1993), 241-248.

[MO] I. Molina Lara y O. Okunev *$L\Sigma(\leq \omega)$-spaces and spaces of continuos functions*, Cent. Eur. J. Math., **8:4**(2010), 754-762.

[Na] K. Nagami, *Σ-spaces*, Fund. Math., **65:2**(1969), 169-192.

[Ok1] O.G. Okunev, *On Lindelöf Σ-spaces of continuous functions in the pointwise topology*, Topology Appl., **49:2**(1993), 149-166.

[Ok2] O.G. Okunev, $L\Sigma(\kappa)$-spaces, en *Open Problems in Topology II*, E. Pearled., Elsevier B. V., 2007, 47-50.

[OT1] O.G. Okunev y V.V. Tkachuk, *Lindelöf Σ-property in $C_p(X)$ and $p(C_p(X)) = \omega$ do not imply countable network weight in X*, Acta Math. Hungar., **90:1-2**(2001), 199-132.

[OT2] O.G. Okunev y V.V. Tkachuk, *Density properties and points of uncountable order for families of open sets in function spaces*, Topology Appl., **122**(2002), 397-406.

[R] E.A. Reznichenko, *A pseudocompact space in which only the subsets of not full cardinality are not closed and not discrete*, Moscow Univ. Math. Bull. **44:6**(1989), 70-71.

[RT] R. Rojas-Hernández, V.V. Tkachuk, *A monotone version of the Sokolov property and monotone retractability in function spaces*, J. Math. Analysis Appl, **412:1**(2014), 125-137.

[Sh] D.B. Shakhmatov, *On pseudocompact spaces with a point-countable base*, Soviet Math. Doklady, **30:3**(1984), 747-751.

[Sha] B.E. Shapirovksy, *Cardinal invariants in compact spaces*, Seminar Gen. Topol., P.S. Alexandroff ed., Moscow Univ. P. H., Moscow, 1981, 162-187.

[Si] O.V. Sipacheva, *The structure of iterated function spaces in the topology of pointwise convergence for Eberlein compacta*, Matem. Zametki, **47:3**(1990), 91-99.

[So] G.A. Sokolov, *On some classes of compact spaces lying in Σ-products*, Comment. Math. Univ. Carolin., **25**, 2, 219-231.

[T1] M.G. Tkachenko, *On continuous images of dense subspaces of topological products*, Uspehi Mat. Nauk, **34:6**(1979), 199-202.

[T2] M.G. Tkachenko, *On continuous images of dense subspaces of Σ-products of metrizable compacta*, Siberian Math. J., **23:3**(1979), 198-207.

[Tk1] V.V. Tkachuk, *Behaviour of the Lindelöf Σ-property in iterated function spaces*, Topology Appl., **107:3**(2000), 297-305.

[Tk2] V.V. Tkachuk, *Lindelöf Σ-property of $C_p(X)$ together with countable spread of X implies X is cosmic*, New Zealand J. Math., **30**(2001), 93-101.

[Tk3] V.V. Tkachuk, *Properties of function spaces reflected by uniformly dense subspaces*, Topology Appl., **132**(2003), 183-193.

[Tk4] V.V. Tkachuk, *A selection of recent results and problems in C_p-theory*, Topology and its Applications, **154**(2007), 2465-2493.

[Tk5] V.V Tkachuk, *Embeddings and frames of function spaces*, J. Math. Analysis Appl, **357**(2009), 237-243.

[Tk6] V.V. Tkachuk, *Lindelöf Σ-spaces: an omnipresent class*, RACSAM, **104:2**(2010), 221-244.

[Tk7] V.V. Tkachuk, *A C_p-Theory Problem Book. Topological and Function Spaces*, Springer New York, 2011.

[Tk8] V.V. Tkachuk, *Some criteria for $C_p(X)$ to be an $L\Sigma(\leq \omega)$-space*, Rocky Mountain J. Math., **43:1**(2013), 373-384.

[Tk9] V.V. Tkachuk, *A C_p-Theory Problem Book. Special Feautures of Function Spaces*, Springer, New York, 2014.

[TT] M.G. Tkachenko, V.V. Tkachuk, *Dyadicity index and metrizability of compact continuous images of function spaces*, Topology and Its Applications, **122(1-3)**(2005), 243-257.

[Wi] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley, 1970.

Índice alfabético